

روش سریع تراختنبرگ

در حساب



آن کاتلر و رودلف مک شین

ترجمه محمد باقری

آن کاتلر و رودلف مک شین

روش سریع تراختنبرگ در حساب

ترجمه محمد باقری

دانش

تهران ۱۳۷۱

This is a Farsi (Persian) translation of:

The Trachtenberg Speed System of Basic Mathematics

Translated and Adapted by:

Ann Cutler & Rudolph McShane.

Greenwood Press, Publishers,

Westport, Connecticut, U.S.A.

دانش

شماره ۲۴، کوچه شهید مهباندوست، خیابان شهید صابونچی، خیابان شهید بهشتی، تهران.

چاپ اول: ۱۳۷۱

تعداد: ۵۰۰۰

لیتوگرافی: قاسملو

چاپ: مرتضی

صحافی: صبح امروز

تلفن مرکز پخش: ۸۵۴۹۶۶

همه حقوق محفوظ است.

به نام خدا

مجله دانشمند با سی سال سابقه فعالیت در زمینه انتشار مواد خواندنی علمی و درک نیازهای خوانندگان جوان، اقدام به انتشار کتابهایی در زمینه های علمی می کند. انتشار این کتابها به منظور پاسخگویی به نیازهای علمی و فنی خوانندگان و گسترش آگاهی آنان انجام می گیرد.

امیدواریم کتابهای دانشمند نیز همچون ماهنامه ها، ویژه نامه ها و ضمیمه ها و در کنار آنها، در خدمت به خوانندگان مشتاق و علاقه مند، مورد توجه قرار گیرد.

دانشمند

فهرست

۹	پیشگفتار
۲۳	فصل اول با جدول یا بی جدول؟ عمل ضرب
۲۴	ضرب اعداد در یازده
۲۹	ضرب اعداد در دوازده
۳۱	ضرب اعداد در شش
۳۹	ضرب اعداد در هفت
۴۳	ضرب اعداد در پنج
۴۵	ضرب اعداد در هشت و نه
۵۱	ضرب اعداد در چهار
۵۴	ضرب اعداد در رقمهای دیگر
۵۷	چکیده مطالب
۶۱	فصل دوم ضرب سریع به روش مستقیم
۶۳	مضروبهای کوتاه: ضرب اعداد دو رقمی در دو رقمی
۶۹	مضروبهای طولانی
۷۸	ضرب کردن در عددهای سه رقمی
۸۳	ضرب کردن در عددهای به طور دلخواه

۸۵	چکیده مطالب
۸۶	امتحان کردن جواب
۹۱	فصل سوم ضرب سریع - روش «دوانگشتی»
۹۹	ضرب کردن در اعداد یک رقمی
۱۰۴	ضرب کردن در عددهای دورقمی
۱۱۰	ضرب اعداد طولانی در عددهای دورقمی
۱۱۲	ضرب در عددهای سه رقمی
۱۱۶	چکیده مطالب
۱۱۹	فصل چهارم عمل جمع و یافتن جواب درست
۱۲۱	یافتن مجموع
۱۳۰	امتحان کردن جواب
۱۳۸	روش کلی برای امتحان کردن
۱۵۱	فصل پنجم عمل تقسیم با سرعت ودقت بیشتر
۱۵۳	روش ساده تقسیم
۱۶۲	روش تقسیم سریع
۱۶۳	طرز انجام عمل تقسیم
۱۷۰	شرح جزئیات روش
۱۸۱	مقسوم علیه های سه رقمی
۱۹۱	مقسوم علیه های به طور دلخواه
۲۰۲	امتحان عمل تقسیم
۲۱۳	فصل ششم جذر مجذور، مقدمه
۲۱۶	مجذور کردن
۲۲۲	عددهای سه رقمی
۲۲۷	جذر

۲۳۶	اعداد پنج رقمی و شش رقمی
۲۴۳	تمرینهایی برای حل
۲۴۷	عددهای هفت رقمی و هشت رقمی
۲۵۷	عددهای طولانیتر
۲۶۰	امتحان عمل

۲۶۳	بیان جبری روش تراختبرگ	فصل هفتم
۲۶۶	نمایش اعداد به صورت کلی	
۲۷۰	دستور ضرب اعداد در یازده	
۲۷۴	اعمال جبری	
۲۸۱	معادله ها	
۲۸۷	روش تراختبرگ از دیدگاه جبر	
۲۹۲	ضرب بدون جدول در حالت کلی	
۲۹۶	مجذور کردن اعداد	
۲۹۸	عمل ضرب به روش یکان و دهگان	
۳۰۴	نمایش اعداد به طور دلخواه	

۳۰۷	پسگفتار	فصل هشتم
-----	---------	----------

«نگاه کن و پرس؛
دوست بدار و گذشت کن؛
یاد بگیر و پیش برو.»

یا کوف تراختنبرگ
(۱۸۸۸ - ۱۹۵۱)

پیشگفتار

آموزگار پسر بچه نه ساله‌ای را که با گامهای استوار راه می‌رفت به سوی تخته سیاهی که رویش ستونی از اعداد به ارتفاع یک متر نوشته شده بود، فرا خواند. پسرک برای آنکه قدش به اعداد بالایی برسد روی پنجه پا بلند شد و مجموع آنها را با سرعت برق به دست آورد.

از دخترکی با گیسهای روبان بسته خواسته شد که حاصل ضرب 735352314 در 11 را پیدا کند. او جواب درست را — که 8088875454 باشد — در زمانی کوتاه‌تر از زمان لازم برای برزبان آوردن عبارت «جدول ضرب اعداد»، یافت. به پسر بچه لاغر اندامی که عینک قاب نقره‌ای به چشم داشت، گفته شد 5132437201 را در 452736502785 ضرب کند. پسرک فوراً کار را آغاز و جواب 2323641669144374104785 را در هفتاد ثانیه محاسبه کرد.

اینجا کلاسی بود که در آن روش ریاضی تراختنبرگ تدریس می‌شد. آنچه این نمایش شعبده بازی ریاضی را شگفت‌انگیزتر می‌کرد این بود که این کودکان کسانی بودند که بارها در درس حساب رد شده بودند، تا آنکه بالاخره والدینشان در عین نومیدی آنها را برای یاد گرفتن

این روش فرستاده بودند.

مرحوم یاکوف تراختنبرگ^۱ بنیانگذار مؤسسه ریاضی در زوریخ (سوئیس) و ابداعگر روش شگفت‌انگیز تازه‌ای در حساب، عمیقاً معتقد بود که همه افراد با «استعدادهای چشمگیر برای محاسبه» به دنیا می‌آیند.

روش تراختنبرگ، افزون بر سریع بودن، ساده هم هست. با فراگرفتن دستورهای آن، انجام محاسبات برق‌آسا، به راحتی قصه خواندن خواهد بود. ظاهراً این کار نوعی جادوگری است ولی دستورهای مذکور از پایه منطقی استواری برخوردارند.

تراختنبرگ، مهندس تیزهوشی که ذهن ابداعگری داشت، روش ریاضیات آسان خود را هنگامی پدید آورد که به عنوان زندانی سیاسی در اردوگاه‌های اسیران رژیم هیتلری به سر می‌برد. این کار فوق‌العاده را که در ایامی مصیبت بار و در جریان دشواریهای طاقت‌فرسا شکل گرفته، نمی‌توان از سرگذشت پدید آورنده‌اش جدا دانست، زیرا ای بسا که اگر پروفیسور تراختنبرگ زندگی آسوده‌تری را می‌گذراند شاید هیچ‌گاه قادر به پدید آوردن روشی نمی‌شد که بتواند زحماتی را که اغلب در حساب پیش می‌آید از میان بردارد.

سرگذشت تراختنبرگ نیز به همان جذابیت و حیرت‌انگیزی روش ریاضی هوشمندانه اوست که به اعتقاد بسیاری از کارشناسان، سرانجام انقلابی در شیوه آموزش حساب در مدارس سراسر جهان پدید خواهد آورد.

یاکوف تراختنبرگ که از تبار روس بود، در ۱۷ ژوئن ۱۸۸۸ در بندر اودسا به دنیا آمد و خیلی زود نبوغ خود را نشان داد. پس از آنکه با درجه ممتاز از مؤسسه مهندسی معدن سن پترزبورگ فارغ‌التحصیل شد، به عنوان «دانشجو - مهندس» به کشتی‌سازی معروف ابوشوف راه یافت.

هنوز بیست و چند سال بیشتر نداشت که مهندس ارشد خوانده شد. در آن ایام در حکومت تزاری، برنامه‌های بلند پروازانه‌ای برای ایجاد عظیمترین نیروی دریایی وجود داشت و ۱۱۰۰۰ نفر زیر نظر تراختنبرگ کار می‌کردند.

تراختنبرگ به رغم آنکه سرپرستی کشتی‌سازی اُبوشوف را بر عهده داشت، صلحدوست فداکاری بود. در آستانه جنگ جهانی اول، یک انجمن مددکاری تأسیس کرد که دانشجویان روس را برای مراقبت از مجروحان آموزش می‌داد. این کار موجب دریافت پاداش ویژه‌ای از تزار شد.

اعدام افراد خانواده سلطنتی در سال ۱۹۱۸ به رویای ایجاد نیروی دریایی قدرتمند در روسیه پایان داد. به این ترتیب امید شخصی تراختنبرگ برای رسیدن به زندگی سعادتبار و صلح آمیز نیز پایان گرفت. تراختنبرگ که آن همه از بیرحمی و خشونت بیزار بود، خود قربانی آن شد.

وقتی انقلابیون در روسیه روی کار آمدند، تراختنبرگ بی پروا علیه خشونت و قانون شکنی سخن می‌گفت. این انتقادهای زندگیش را به مخاطره انداخت. در اوایل سال ۱۹۱۹ خبردار شد که می‌خواهند او را بکشند. لباس روستایی به تن کرد و شبانه با پای پیاده، در حالی که روزها در گوشه‌ای پنهان می‌شد، راه آلمان را در پیش گرفت.

برلن با خیابانهای پهن و زیبا، هوای سرد و آسمان صاف خاطره سن پترزبورگ را در ذهن او زنده می‌کرد. در این شهر مقیم شد و در اتاقی کوچک در محله‌ای دور افتاده زندگی تازه‌ای را آغاز کرد. اینجا با شماری از روشنفکران ناکام و سرخورده دوران پس از جنگ دوستی به هم زد و رهبر آنان شد. به عنوان سر دبیر یک مجله، اغلب برای این گروه سخنرانی می‌کرد و می‌کوشید تا آلمان را به سوی آینده‌ای صلح آمیز سوق دهد.

تراختنبرگ با زن زیبارویی از طبقه اشراف ازدواج کرد. او با نوشتن مقاله‌هایی انتقادی درباره شوروی و تدوین نخستین کتاب مرجع درباره صنایع این کشور، شهرتی به هم زد. بتدریج او را به عنوان خبره‌ترین کارشناس اروپا در زمینه امور مربوط به شوروی شناختند. در این احوال، ذهن خلاق او به کار دیگری روی آورد. تراختنبرگ روشی برای تدریس زبانهای خارجی ابداع کرد که هنوز در بسیاری از مدارس آلمان به کار می‌رود.

به نظر می‌رسید که دیگر تلاطمهای دوران اولیه زندگیش را پشت سر گذاشته است. با روی کار آمدن هیتلر، زندگی تراختنبرگ دوباره رنگ آشنای مبارزه به خود گرفت. بی هیچ ترسی، علیه فاشیسم صحبت می‌کرد. شهرت تراختنبرگ به حدی بود که هیتلر نخست صلاح را در آن دید که حملات او را نادیده بگیرد. ولی وقتی تند و تیز به محکوم کردن فاشیسم پرداخت، هیتلر تصمیم گرفت صدای او را خاموش کند.

در سال ۱۹۳۴، پس از آنکه فهمید ماندن در آلمان به قیمت جاناش تمام خواهد شد، بار دیگر از مهلکه گریخت. تراختنبرگ به همراه همسرش به وین پناه برد و در آنجا سر دبیر یک نشریه علمی بین‌المللی شد.

هنگامی که جهان برای جنگ آماده می‌شد، تراختنبرگ به منظور تقویت انگیزه‌های صلح‌جویانه اثری به نام وزارت صلح^۱ نوشت که خوانندگان بسیاری یافت و مورد ستایش سیاستمدارانی چون روزولت، ماساریک^۲ و ون زیلانت^۳ قرار گرفت.

1. Das Friedensministerium

۲. رئیس جمهوری چکسلواکی در سالهای ۱۹۱۸ تا ۱۹۳۵، صاحب آثار متعدد فلسفی و سیاسی که در سال ۱۹۳۷ در گذشت - م.

۳. Van Zeeland اقتصاددان و سیاستمدار بلژیکی که طی سالهای ۱۹۳۵ تا ۱۹۳۷ نخست وزیر بلژیک بود و در سال ۱۹۷۳ در گذشت - م.

اما در سراسر جهان، چراغ صلح به خاموشی می گرایید. آلمانیها وارد خاک اتریش شدند و نام تراختنبرگ در رأس فهرست کسانی بود که هیتلر فرمان دستگیریشان را داده بود. او را گرفتند و به زندان انداختند.

تراختنبرگ موفق شد به یوگسلاوی بگریزد. آنجا به همراه همسرش کنتس آلیس، همچون صید به دام افتاده می زیستند. کمتر جرأت می کردند در طول روز از خانه خارج شوند و با هیچ دوست و آشنایی مراوده نداشتند. اما این دوران آزادی دیری نپایید. شبی به صدای ضربه های محکم که به در کوفته شد از خواب پرید - مأموران گشتاپو پشت در بودند. پلیس هیتلر سرانجام توانسته بود او را به چنگ آورد.

تراختنبرگ را در کامیون مخصوص حمل دام سوار کردند و به اردوگاهی بردند که به خاطر شرایط بیرحمانه اش معروف بود. کوچکترین تخلفی از قوانین، شدیدترین تنبیهات را در پی داشت. هر روز دسته ای از زندانیان که انتخاب آنها تصادفی صورت می گرفت در کوره های آدم سوزی قربانی می شدند.

تراختنبرگ برای حفظ تعادل روحی خود به دنیای درون خویش پناه برد - دنیایی که منطق و نظم بر آن حاکم بود. در اوضاعی که روز به روز جسمش تکیده تر می شد و پیرامونش را طاعون، مرگ و نابودی فرا گرفته بود، ذهن او از پذیرفتن شکست سر باز زد و رهسپار دنیای اعداد شد و به خواست او کارهای معجزه آسایی صورت داد.

آنجا از کتاب، کاغذ، قلم یا مداد خبری نبود. ذهن پیکارجوی او همه این کمبودها را جبران می کرد. او معتقد بود که ریاضیات کلید درست اندیشی است. در روزگار خوشتری، ریاضیات را یک وسیله سرگرمی عالی یافته بود. در جهانی که دستخوش دیوانگیها بود، منطق آرام اعداد، آنها را همچون دوستانی قدیمی جلوه گر می ساخت. ذهن او در خلال تنظیم و بازآرایی اعداد، راههای تازه ای برای کار کردن با آنها پیدا کرد.

او نزد خود اعداد غول آسایی را برای افزودن به یکدیگر در نظر گرفت و به جمع آنها پرداخت، چون کسی نمی تواند جمع هزاران عدد را به خاطر بسپارد، روشی مصون از خطا ابداع کرد که به کمک آن حتی کودکان هم می توانستند هزاران عدد را بر هم بیفزایند، بی آنکه اشتباهی بکنند و در واقع بی آنکه در عمل جمع از عدد یازده بالاتر روند.

طی سالهای طولانی زندگی دوزخی در اردوگاه اسیران، از هر لحظه فراغت، برای تکمیل روشهای ساده ریاضی خود بهره جست و برای هر چیز، از ضرب گرفته تا اعمال جبری، راههای میانبری ابداع کرد.

هنگامی که سر سخرانه به انجام عملیات و محاسبات ریاضی می پرداخت — قوانینی برای محاسبه می یافت، بارها و بارها به اثبات آنها می پرداخت و بار دیگر موفق به ساده تر کردن روش خود می شد — تباهی و سیه روزی، فریادهای برآمده از سلولهای مرطوب و اتاقهای شکنجه، بوی تعفن کوره ها، وحشیگریها و تهدید دایمی مرگ را کمتر احساس می کرد.

این ناملايمات، نبوغ او را بیشتر بر می انگيخت. چون کاغذ در اختیار نداشت، مطالبش را روی تکه های کاغذ لفاف، پاکتهای کهنه یا پشت برگه های کارکرد آلمانیها که بدقت نگهداری می شد، یادداشت می کرد. چون حتی همین تکه های کاغذ هم غنیمت بود، همه کارها را در ذهنش انجام می داد و تنها نتایج به دست آمده را ثبت می کرد. امروزه کسانی که از روش تراختنبرگ استفاده می کنند آن را چنان ساده می یابند که می توانند همه مسائل را ذهنی حل کنند و تنها جوابها را روی کاغذ بیاورند.

اندکی پس از عید پاک سال ۱۹۴۴، تراختنبرگ خبردار شد که می خواهند او را اعدام کنند - حکم از بالا آمده بود و دیگر صرفاً یک احتمال نگران کننده نبود. تراختنبرگ با واقعیتی ناگزیر رو به رو شد، پس در دنیایی که خودش آن را ساخته بود فرو رفت. آرام به کار خود ادامه می داد: با معادله ها بازی می کرد، فرمولهایی به دست می آورد و

قوانینی استخراج می کرد. تصمیم گرفته بود که حتماً روش خود را کامل کند! موضوع کار خود را با یکی از همبندیها در میان گذاشت. تراختنبرگ حدود هفت سال در زندان به سر برد.

همسرش که هیچ گاه از اردوگاه اسیران دور نشده بود از ماجرای حکم اعدام با خبر شد. از آخرین بازمانده پول و جواهراتش دل کند، رشوه ای داد و واسطه ای پیدا کرد تا توانست اندکی پیش از اجرای حکم اعدام، ترتیب انتقال پنهانی او را به اردوگاه دیگری فراهم آورد.

او را به لایپزیگ فرستادند که بسختی بمباران شده بود و اوضاع آن از هر لحاظ درهم ریخته بود. نه غذایی گیر می آمد، نه گرمایی و نه هیچ گونه امکاناتی. در اقامتگاههای ملال آور، بین ردیفهای به هم فشرده بسترهای ناهموار، جایی برای دراز کشیدن یافت نمی شد. اخلاقیات هیچ گاه بدین پایه نزول نکرده بود. مرده ها اغلب چند روز بر جای می ماندند. همخانه ها ضعیفتر از آن بودند که بخواهند گوری بکنند و نگهبانان هراس آلوده تر از آن که بخواهند دستوری بدهند.

در این بلبشو، مرد مصممی که حاضر باشد جان خود را به مخاطره اندازد، می توانست به سوی آزادی بگریزد. تراختنبرگ بخت خود را آزمود و در تاریکی شب از زیر دو ردیف سیم خاردار بیرون خزید. آنگاه به همسر خود که همه عمر، توان و ثروت خود را وقف یاری به او کرده بود، پیوست. ولی تراختنبرگ نه گذرنامه داشت و نه هیچ مدرکی که به کارش بیاید. او شهروند بی وطنی بود که هر لحظه خطر دستگیری تهدیدش می کرد.

دیگر بار، او را به حبس کشاندند. یک مقام اداری عالیرتبه که از کار تراختنبرگ با خبر بود، او را به یک اردوگاه کار اجباری در تریست فرستاد. در آنجا او را به کار سنگ شکنی گماشتند ولی هوا ملایمتر بود و نگهبانان چندان سختگیر نبودند.

خانم تراختنبرگ آرام آرام توانست با رشوه دادن به نگهبانان، پیامهایی برای شوهرش بفرستد و به این ترتیب برنامه فرار دیگری تنظیم

شد. در شب بی ستاره‌ای در اوایل سال ۱۹۴۵، تراختنبرگ از پرچین سیم خاردار گذشت و در حالی که نگهبانان مستقر در برجهای مراقبت به سویش شلیک می‌کردند مسافتی طولانی را لابه‌لای چمنها سینه‌خیز طی کرد. این آخرین گریز او بود. خانم تراختنبرگ در میعاد گاه منتظرش بود. آنها با هم به سوی مرز سویس رهسپار شدند.

تراختنبرگ در یک اردوگاه پناهندگان در کشور سویس تجدید قوایی کرد. موهایش سفید و بدنش ناتوان شده بود، اما سالهای بلا تکلیفی و نومیدی را پشت سر گذاشته و از پا نیفتاده بود. برق شجاعت همچنان در چشمان آبی زلال و آرام او موج می‌زد. شور و سرزندگی و میل شدید به زیستن، هنوز بخشی از وجود او بود.

رفته رفته که بهبود می‌یافت، به تکمیل روش ریاضی خود پرداخت که زمانی او را از دیوانه شدن حفظ کرده بود و به او توانایی پایداری در بازجوییهای گشتاپو را داده بود و اکنون نیز او را قادر می‌ساخت زندگی تازه‌ای را آغاز کند.

تراختنبرگ کودکان را دوست داشت و شیوه جدید و ساده خود برای انجام عملیات حساب را نخستین بار به آنان آموخت. او همواره بر این اعتقاد بود که هر انسانی دارای هوش سرشار زاده می‌شود. حالا می‌خواست این نظر را ثابت کند. تعمداً کودکانی را برای این کار برگزید که در مدرسه تنبل به شمار می‌آمدند.

این بچه‌ها، عموماً وامانده، خجالتی و گوشه‌گیر، یا درست در نقطه مقابل، یعنی پررو و سرکش بودند. به هر حال، همه آنها کودکان ناسازگاری بودند که بد تربیت شده بودند.

واکنش این کودکان نسبت به شیوه تازه و آسان محاسبات، آنی بود. این روشها به نظر آنان همچون سرگرمی دلپذیری جلوه می‌کرد. احساس توانایی ایجاد شده در آنها بزودی موجب شد که خصلتهای نابهنجار خود را از دست بدهند.

تأثیرات جنبی فراگیری روش جدید بر این کودکان نیز به همین

اندازه مهم بود. ضمن اینکه بچه‌ها مهارتی در کار با اعداد به دست می‌آوردند، آرامش و اطمینانی در آنان پدید می‌آمد که شخصیتشان را دگرگون می‌کرد و کم‌کم در سایر درسها هم پیشرفت محسوسی می‌کردند. احساس توانایی، تلاشها و پیروزیهای بعدی را با خود به دنبال می‌آورد.

تراختنبرگ برای آنکه نشان دهد هر کسی قادر است طرز حل سریع و ساده مسائل را فرا گیرد، روش خود را با موفقیت به کودک دهساله‌ای که عقب افتاده محسوب می‌شد یاد داد. نه تنها این کودک شیوه محاسبه کردن را فرا گرفت، بلکه ضریب هوشی او نیز فزونی یافت. چون همه مسائل به طور ذهنی حل می‌شد، کودک نیروی حافظه چشمگیری به دست آورد و قدرت تمرکزش زیاد شد.

در سال ۱۹۵۰، تراختنبرگ مؤسسه ریاضی زوریخ را بنیاد نهاد که در نوع خود نمونه بود. در ساختمان ساده و وسیع مدرسه، هر روز کلاسها تشکیل می‌شود. در طول روز، شاگردان مدرسه، کودکان هفت تا هجده ساله هستند. ولی هنگام عصر، صدها زن و مرد مشتاق که زحمت فراگیری حساب به روش سنتی را تجربه کرده‌اند، سر کلاسها حاضر می‌شوند. اینان که عمری را با شیوه قدیمی سر کرده‌اند از سادگی روش تازه لذت می‌برند و از مزایای ریاضیات نویافته خود با افتخار سخن می‌گویند. شاید این تنها مدرسه دنیا باشد که شاگردان آن — چه صبح و چه عصر — نیم ساعتی پیش از آنکه زنگ کلاس بخورد به مدرسه می‌آیند. براستی ماهیت روش تراختنبرگ چیست و از آن چه انتظاری می‌توان داشت؟

روش تراختنبرگ متکی بر دستورالعملهایی است که با آنچه در روشهای معمولی وجود دارد اساساً متفاوت است. از جدول ضرب و از عمل تقسیم خبری نیست. برای یادگیری این روش کافی است شمردن را بلد باشید. این روش مبتنی بر کلیدهایی است که آنها را باید به خاطر سپرد. با یاد گرفتن اینها، حساب به صورت موضوعی آسان و شیرین در

می آید، زیرا شخص خواهد توانست اعداد مطلوب را «بخواند».

مزایای مهم این روش عبارت‌اند از سهولت بیشتر، سرعت بیشتر و دقت بیشتر. مربیان دریافته‌اند که روش تراختنبرگ زمان انجام محاسبات ریاضی را به بیست درصد کاهش می‌دهد.

در همهٔ اعمال مربوط به محاسبه، امکان راه یافتن خطا برای انسان یا دستگاه وجود دارد. اما معلوم شده است که روش تراختنبرگ با داشتن دستور بی نظیری برای امتحان درستی محاسبه به کمک طرح‌نه‌ها یا یازده‌ها، درست بودن نتیجه را با اطمینان ۹۹ درصد تضمین می‌کند، که رکورد چشمگیری است.

ارزش عملی والای این روش جدید در آن است که بر خلاف شیوه‌ها و ترفندهایی که در گذشته برای حالت‌های خاص ابداع شده بود، یک روش کامل است. روش تراختنبرگ که خیلی آسانتر از حساب معمولی است، به افراد عادی که هیچ سروکاری با ریاضیات نداشته‌اند امکان دستیابی به چنان نتایجی را می‌دهد که عموماً از نبوغ‌های ریاضی انتظار می‌رود. این روش که «تند نویسی ریاضیات» خوانده شده، در پیچیده‌ترین مسائل نیز قابل استفاده است.

اما شاید بزرگترین حسن این روش تازه و انقلابی در آن باشد که دلبستگی‌های تازه‌ای را نسبت به ریاضیات بر می‌انگیزاند، در شاگرد اعتماد به نفس پدید می‌آورد و با گشودن پهنهٔ تلاشی پیش‌رویش، او را به فرا گرفتن موضوعی فرا می‌خواند که امروزه در مدارس «منفورترین» درس قلمداد می‌شود.

پروفسور تراختنبرگ معتقد بود علت اینکه اغلب ما در کار با اعداد مشکلاتی داریم دشوار بودن فهم حساب نیست، بلکه علت آن در روش کهنه‌ای نهفته است که با آن به ما درس داده‌اند. بسیاری از مربیان نیز همین عقیده را دارند.

بررسی یکساله‌ای که بخش بازرسی آموزش دانشگاه پرینستون انجام داد، نشان می‌دهد که حساب یکی از درس‌هایی است که در مدارس

[امریکا] به بدترین وضع تدریس می شود و معلوم شد که طی یک قرن اخیر آموزش علم حساب در کشور [امریکا] پیشرفت چندانی، یا هیچ پیشرفتی نداشته است؛ همچنین معلوم شد که مهمترین دستاوردهای علوم ریاضی از سده هفدهم به این سو، به دبستانها و دبیرستانهای ما [در آمریکا] راه نیافته است. این گزارش حاکی از ویرانگریهایی است که به بار می آید. در یک مدرسه عالی مهندسی، معلومات ریاضی هفتاد و دو درصد دانشجویان را به قدری ضعیف تشخیص دادند که لازم شد برای آمادگی حضور در کلاس درس سال اول، یک دور ریاضیات دبیرستانی را مرور کنند.

بویژه در شرایط امروزی که نیاز مبرمی به کادر آموزش دیده علمی و فنی با درک جدی از ریاضیات وجود دارد، چنین اوضاعی بسیار تأسف انگیز است. این وازدگی نسبت به ریاضیات که به گفته مریان نقش بسیار مهمی در تعیین مسیر کار و زندگی جوانان دارد، از سطوح دبستان و دبیرستان آغاز می شود. در این مراحل است که مهندسان و دانشمندان بالقوه فردا، از این «منفورترین درس» روگردان می شوند و پس از آن، هر گاه مقدور باشد حساب را از برنامه درسی خود کنار می گذارند.

روش تراختنبرگ که در سویس به طور کامل آزمایش شده است، کار را از همان ابتدا آغاز می کند؛ از اعمال اصلی حساب که شاگرد نخستین بار در آن با دشواریهایی روبه رو می شود و از لحاظ عاطفی کم کم چنان تأثیراتی می پذیرد که بعدها او را در کار ریاضیات فلج می کند.

قدرت انجام اعمال اصلی حساب با سهولت چشمگیری که روش تراختنبرگ پدید می آورد، سبب می شود که ترس و تزلزل شاگردان که در مواجهه با زبان کاملاً نمادی و دقت مطلق ریاضیات راه آنان را سد می کند، از میان برود. به گفته کارشناسان، علت واقعی بیزاری اغلب شاگردان از ریاضیات، موانع عاطفی است، نه ضعف یادگیری.

ایس واقعیت را که استفاده از میانبرها، حساب را آسانتر و

خوشایندتر می‌کند، طی جنگ جهانی دوم نیروهای نظامی به طور قطعی اثبات کردند. درجه‌داران و ناویهای که دوره‌های بازآموزی ریاضیات دبیرستانی را می‌گذراندند، با ساده شدن مطالب قادر بودن کار چندین سال را چند ماهه پیش ببرند.

دانشجویان پزشکی، معماران و مهندسان زورینخی دریافته‌اند که به کمک روشهای ریاضی آسان تراختنبرگ می‌توانند از عهده گذراندن امتحانات دشواری که برای تکمیل دوره آنان اجباری است، برآیند. یکی از کارشناسان برجسته معماری در سوئیس تنها پس از شرکت کردن در کلاسهای مؤسسه ریاضی و فرا گرفتن روش تراختنبرگ توانست در رشته انتخابی خود ادامه تحصیل دهد.

در سوئیس، وقتی از "مؤسسه ریاضی" صحبت می‌شود، از آن به منزله «مدرسه نبوغ» یاد می‌کنند.

طی آزمایش جالبی که اخیراً در زوریخ انجام شد، شاگردان روش تراختنبرگ به زور آزمایی با ماشینهای محاسبه فرا خوانده شدند. یک ساعت تمام، مسئول امتحان مسائل را می‌خواند: تقسیمهای پیچیده، جمعهای غول‌پیکر، مجذور کردنها و جذرگیریهای دشوار و ضربهای خیلی بزرگ.

همین که ماشینها با صدای تیک‌تیک مشغول پاسخگویی شدند، شاگردان نوجوان بسرعت و بدون هیچ مرحله بینابینی جوابها را روی کاغذ آوردند.

شاگردان از ماشین پیش افتادند!

این شاگردانی که در دقت و سرعت، ماشینهای محاسبه را پشت سر گذاشتند نابغه نبودند. سرعت عمل آنان از فشردگی و سراسری روش کارشان ناشی می‌شد.

اما تنها در حرفه‌های تخصصی نیست که دانستن حساب ضرورت پیدا می‌کند. امروزه، در زندگی عادی، ریاضیات نقش حیاتی روزافزونی دارد؛ بویژه در کشور ما [امریکا] که همه در انبوه‌ای از اعداد زندگی

می کنیم.

با آموختن روش تراختنبرگ، زحمت حساب کردن که بخشی از کارهای روزانه هر کسی است، بر طرف می شود. سویسیها که به تیز هوشی در کار بازرگانی معروف اند، با پی بردن به روشنی و خطاناپذیری روش تراختنبرگ، اکنون در همه بانکها، اغلب مؤسسه های بازرگانی و در اداره مالیات از آن استفاده می کنند. کارشناسان ریاضی عقیده دارند که طی دهه آینده، روش تراختنبرگ همان تأثیر فراگیری را بر آموزش و علوم خواهد گذاشت که «تند نویسی» بر امر بازرگانی گذاشته است.

اکنون روش تراختنبرگ به صورت اصیل و معتبرش برای نخستین بار در قالب کتابی منتشر می شود. ضمن مطالعه کتاب متوجه خواهید شد که پروفیسور تراختنبرگ در روش خود نکاتی را وارد کرده است که ابداع خود او نیست. اینها مطالب نسبتاً کم اهمیت تری هستند و به منظور ساده کردن هر چه بیشتر به کار گرفته شده اند. برای حفظ روال اصلی مطالب، هر جا چنین نکته ای در متن آمده، توجه خواننده را به آن جلب کرده ایم.

به اعتقاد مؤلفان این کتاب، هر کس دستورهایی را که در اینجا عرضه شده یاد بگیرد می تواند در استفاده از روش تراختنبرگ مهارت پیدا کند.

فصل اول

با جدول یا بی جدول؟

عمل ضرب

در پیشگفتار کتاب، دربارهٔ هدفهای روش تراختنبرگ سخن گفتیم. اکنون می‌خواهیم با محتوای این روش آشنا شویم. نخستین موضوع بحث، شیوهٔ جدید انجام عمل ضرب است: می‌خواهیم عمل ضرب را بدون از برداشتن جدول ضرب انجام دهیم. ناممکن به نظر می‌رسد؟ نه تنها ممکن است، آسان هم هست. البته باید این توضیح را هم بدهیم که با استفاده از جدول ضرب مخالف نیستیم. اغلب اشخاص جدول ضرب را خوب بلدند؛ به عبارت دیگر همهٔ آن را از بر کرده‌اند و فقط ممکن است در چند مورد دچار تردید شوند. ممکن است کسی در مورد هشت هفت تا، یا شش نه تا قدری شک کند ولی اعداد کوچکتری مثل چهار پنج تا، برای همه «در حکم آب خوردن» است. ما با استفاده از این معلوماتی که بزحمت حاصل شده، موافقیم. منظور ما در اینجا انسجام بخشیدن به آن است. راجع به این موضوع دوباره در همین فصل سخن خواهیم گفت. اکنون می‌خواهیم برخی عملهای ضرب را بدون استفاده از جدول انجام دهیم:

نخست ضرب اعداد در یازده را بررسی می‌کنیم. برای سهولت بیان، ابتدا روش کار را به صورت دستورهایی ذکر می‌کنیم:

ضرب اعداد در یازده

۱. آخرین عدد مضروب (عددی که در یازده ضرب می شود) را به عنوان رقم سمت راست جواب، می نویسیم.
 ۲. هر عدد متوالی از مضروب با همسایه طرف راست آن، جمع می شود.
 ۳. اولین عدد مضروب، رقم سمت چپ جواب می شود. این آخرین مرحله کار است.
- در روش تراختنبرگ، مثل روش ضرب معمولی، رقمهای جواب یکی یکی، از راست به چپ نوشته می شوند. مثال ساده ای می زنیم، ۶۳۳ ضرب در ۱۱:

$$\begin{array}{r} 633 \times 11 \\ \hline \end{array}$$

محل نوشتن جواب

با استفاده از این دستورها، جواب را یک رقم، یک رقم، از راست به چپ، زیر ۶۳۳ می نویسیم. از این پس برای انجام کار به همین صورت عمل می کنیم. ستاره های بالای مضروب در این مثال نشان می دهند که در هر مرحله از محاسبه، با کدام رقمها سرو کار داریم. حالا دستورها را به کار می بندیم:

دستور اول

آخرین رقم ۶۳۳ را به عنوان رقم سمت راست جواب می نویسیم:

$$\begin{array}{r} 633^* \times 11 \\ \hline 3 \end{array}$$

دستور دوم

هر رقم متوالی از ۶۳۳ را با همسایه طرف راست آن جمع می کنیم،

۳ بعلاوه ۳ می شود ۶:

$$\begin{array}{r} \overset{*}{6} \overset{*}{3} \overset{*}{3} \\ \times 11 \\ \hline 63 \end{array}$$

این دستور را دوباره به کار می بندیم، ۶ بعلاوه ۳ می شود ۹:

$$\begin{array}{r} \overset{*}{6} \overset{*}{6} \overset{*}{3} \\ \times 11 \\ \hline 963 \end{array}$$

دستور سوم

اولین رقم ۶۶۳ یعنی ۶، رقم سمت چپ جواب می شود:

$$\begin{array}{r} \overset{*}{6} \overset{*}{3} \overset{*}{3} \\ \times 11 \\ \hline 6963 \end{array}$$

پس جواب ۶۹۶۳ است.

در مورد اعداد طولانیتر هم به همین روش عمل می کنیم. دستور دوم که «هر رقم متوالی از مضروب به همسایه طرف راست آن افزوده می شود»، در مثال بالا دوبار به کار رفت؛ در عددهای طولانیتر چندین بار آن را به کار می بریم. مثال ۷۲۱۳۲۴ ضرب در ۱۱ را در نظر می گیریم:

$$\begin{array}{r} 721324 \\ \times 11 \\ \hline \end{array}$$

دستور اول

آخرین رقم ۷۲۱۳۲۴ به عنوان رقم سمت راست جواب نوشته می شود:

$$\begin{array}{r} 72132\overset{*}{4} \\ \times 11 \\ \hline 4 \end{array}$$

دستور دوم

هر رقم متوالی از ۷۲۱۳۲۴ با همسایه طرف راست آن، جمع می شود:

$$\begin{array}{r} 7213\overset{*}{2}\overset{*}{2} \times 11 \\ \hline 2 \end{array}$$

۲ بعلاوه ۴ می شود ۶

$$\begin{array}{r} 7213\overset{*}{2}\overset{*}{2} \times 11 \\ \hline 562 \end{array}$$

۳ بعلاوه ۲ می شود ۵

$$\begin{array}{r} 7213\overset{*}{2}\overset{*}{2} \times 11 \\ \hline 2562 \end{array}$$

۱ بعلاوه ۳ می شود ۴

$$\begin{array}{r} 7213\overset{*}{2}\overset{*}{2} \times 11 \\ \hline 32562 \end{array}$$

۲ بعلاوه ۱ می شود ۳

$$\begin{array}{r} 7213\overset{*}{2}\overset{*}{2} \times 11 \\ \hline 934562 \end{array}$$

۷ بعلاوه ۲ می شود ۹

دستور سوم

اولین رقم ۷۲۱۳۲۴، رقم سمت چپ جواب می شود:

$$\begin{array}{r} 7213\overset{*}{2}\overset{*}{2} \times 11 \\ \hline 7934562 \end{array}$$

پس جواب ۷۹۳۴۵۶۲ است.

چنانکه می بینید، هر رقم از عدد طولانی دوبار به کار می رود. یک بار به عنوان «عدد» و سپس، در مرحله بعد، به عنوان «همسایه» به کار می رود. در مثال اخیر، رقم ۱ (از مضروب) هنگام دادن رقم ۴ از جواب، «عدد» بود، ولی در مرحله بعد، وقتی با ۲ جمع می شد تا رقم ۳ را بدهد، «همسایه» به شمار می آمد:

$$\begin{array}{r} 7213\overset{*}{2}\overset{*}{2} \times 11 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7213\overset{*}{2}\overset{*}{2} \times 11 \\ \hline 3 \end{array}$$

به جای استفاده از این سه دستور، می‌توانیم یک دستور را در مفهوم طبیعی و عادتش به کار ببریم. این دستور چنین است: «با همسایه جمع کن». ابتدا باید صفری جلوی عدد داده شده بنویسیم یا فرض کنیم صفری جلوی آن هست. سپس دستور جمع کردن با همسایه را به نوبت در مورد همه رقمهای عدد داده شده اجرا می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 0 \ 6 \ 3 \ 3 \\ \times 11 \\ \hline \end{array}$$

چون ۳ همسایه ندارد چیزی با آن جمع نمی‌شود! - ۳

$$\begin{array}{r} 0 \ 6 \ 3 \ 3 \\ \times 11 \\ \hline \end{array}$$

مانند قبل عمل می‌کنیم - ۹ ۶ ۳

$$\begin{array}{r} * \ 0 \ 6 \ 3 \ 3 \\ \times 11 \\ \hline \end{array}$$

صفر بعلاوه ۶ می‌شود ۶ - ۶ ۹ ۶ ۳

این مثال نشان می‌دهد که چرا باید جلوی مضروب صفر بگذاریم. این صفر به ما یادآوری می‌کند که کار را زودتر قطع نکنیم. اگر صفر را جلوی عدد ننویسیم، ممکن است فراموش کنیم که رقم ۶ را در آخر جواب بنویسیم و در نتیجه خیال کنیم که جواب همان ۹۶۳ است. جواب همیشه یک رقم طولانیتر از عدد مفروض است، و صفر جلوی عدد موجب رعایت این نکته می‌شود.

حالا خودتان مثالی حل کنید: ۴۴۱۳۶۲ ضرب در ۱۱. آن را به صورت مناسب بنویسید:

$$\begin{array}{r} 0 \ 4 \ 4 \ 1 \ 3 \ 6 \ 2 \\ \times 11 \\ \hline \end{array}$$

اگر کار را با ۲ شروع کنید که محل درست شروع است، و مرحله به مرحله به سمت چپ بیایید و در هر مرحله، همسایه را با رقم جمع کنید، باید به جواب درست برسید که ۴۸۵۴۹۸۲ است. گاه در جمع کردن یک رقم با همسایه‌اش، عددی دو رقمی به

دست می آید، مثلاً ۵ با ۸ که ۱۳ می شود. در این حالت ۳ را می نویسید و ۱ را همان طور که در حساب دیده اید به عنوان «ده بر یک» نگاه می دارید. اما خواهید دید که در روش تراختنبرگ هیچ وقت لازم نمی شود عدد بزرگی را نگاه دارید. اگر رقمی نگاه داشته شود یا ۱ است یا در مراحل بعدتر احیاناً ۲. این تفاوت در موقع حل مسائل پیچیده تأثیر زیادی دارد.

کافی است برای «ده بر یک»، از یک نقطه و برای «بیست بر دو» که کمتر پیش می آید از دو نقطه استفاده کنیم:

$$\begin{array}{r} 0 \ 1 \ 7 \ 5 \ 2 \times 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 9 \ 2 \ 9 \ 2 \end{array} \quad \text{یعنی ۱۲ که مجموع ۷ و ۵ است}$$

این یکی را خودتان حل کنید: ۷۱۵۶۲۴ ضرب در ۱۱. اول آن را به صورت زیر بنویسید:

$$0 \ 7 \ 1 \ 5 \ 6 \ 2 \ 2 \times 1 \ 1$$

زیر رقم ۵ از این عدد یک «ده بر یک» خواهید داشت.

جواب درست مسئله، ۷۸۷۱۸۶۴ است.

در حالت خیلی خاصی از عددهای طولانی که با ۹ شروع می شوند و بعد از آن هم رقم بزرگی مثل ۸ دارند، مثلاً در مورد ۹۸۸۳۴ ممکن است در آخرین مرحله یک ۱۵ داشته باشیم. مثال:

$$\begin{array}{r} 9 \ 8 \ 8 \ 3 \ 4 \times 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 8 \ 7 \ 1 \ 7 \ 4 \end{array}$$

ضرب اعداد در دوازده

برای ضرب هر عدد در ۱۲، دستور زیر را انجام دهید:

هر رقم را دو برابر کنید و همسایه‌اش را با آن جمع کنید

این کار شبیه ضرب کردن در ۱۱ است ولی در اینجا هر «عدد» را قبل از جمع کردن با «همسایه» دو برابر می‌کنیم. برای ضرب ۴۱۳ در ۱۲، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مرحله اول:

$$\begin{array}{r} 0 \ 4 \ 1 \ 3 \\ \times 12 \\ \hline \end{array}$$

رقم سمت راست را دو برابر می‌کنیم و زیر خط می‌نویسیم
(این رقم همسایه ندارد)

مرحله دوم:

$$\begin{array}{r} 0 \ 4 \ 1 \ 3 \\ \times 12 \\ \hline 5 \ 6 \end{array}$$

۱ را دو برابر می‌کنیم و با ۳ جمع می‌کنیم

مرحله سوم:

$$\begin{array}{r} 0 \ 4 \ 1 \ 3 \\ \times 12 \\ \hline 9 \ 5 \ 6 \end{array}$$

۴ را دو برابر می‌کنیم و با ۱ جمع می‌کنیم

مرحله آخر:

$$\begin{array}{r} 0 \ 4 \ 1 \ 3 \\ \times 12 \\ \hline 4 \ 9 \ 5 \ 6 \end{array}$$

دو برابر صفر همان صفر است؛ آن را با ۴ جمع می‌کنیم

جواب ۴۹۵۶ است. اگر خودتان این کار را بکنید، می‌بینید که جواب چقدر زود و راحت پیدا می‌شود.

حالا یک بار خودتان تمرین کنید: ۶۳۲۴۷ ضرب در ۱۲. نخست این عدد را طوری بنویسید که رقمهایش از یکدیگر فاصله داشته باشند و هر رقم از جواب را درست زیر رقمی از ۶۳۲۴۷ که آن را داده است بنویسید. حسن این کار فقط در مرتب بودن آن نیست، بلکه به خاطر جلوگیری از اشتباه، بسیار پر ارزش است. در روش ضرب تراختنبرگ، روی این نکته تأکید می‌کنیم زیرا سبب می‌شود که «عدد» و «همسایه» را با یکدیگر اشتباه نگیریم. جای خالی بعدی، که باید رقم بعدی جواب را در آن بنویسیم، درست زیر «عدد» (رقمی که در این مثال باید دو برابر شود) قرار دارد. عدد سمت راست آن «همسایه» است که باید با آن جمع شود. مثال بالا به صورت زیر حل می‌شود:

$$\begin{array}{r} 0 \ 6 \ 3 \ 2 \ 2 \ 7 \times 1 \ 2 \\ \hline 0 \ 4 \end{array}$$

دو ۷ تا، ۱۴ تا ۴ ده بر یک داریم

$$\begin{array}{r} 0 \ 6 \ 3 \ 2 \ 2 \ 7 \times 1 \ 2 \\ \hline 0 \ 4 \end{array}$$

دو ۴ تا، بعلاوه ۷، بعلاوه ۱ می‌شود ۱۶؛ ده بر یک داریم ۰۶۰۴

$$\begin{array}{r} 0 \ 6 \ 3 \ 2 \ 2 \ 7 \times 1 \ 2 \\ \hline 9 \ 0 \ 6 \ 0 \ 4 \end{array}$$

دو ۲ تا، بعلاوه ۴، بعلاوه ۱، می‌شود ۹ ۰۶۰۴

بالاخره به اینجا می‌رسید که:

$$\begin{array}{r} 0 \ 6 \ 3 \ 2 \ 2 \ 7 \times 1 \ 2 \\ \hline 7 \ 0 \ 5 \ 8 \ 9 \ 0 \ 6 \ 0 \ 4 \end{array}$$

ضرب اعداد در پنج، در شش و در هفت

برای ضرب در این سه عدد (۵، ۶ و ۷) از مفهوم «نصف» یک رقم استفاده می‌کنیم. کلمه «نصف» را داخل علامت گیومه گذاشته‌ایم، زیرا نوعی نصف ساده شده است. برای آسان شدن کار، اگر کسری پیدا شد، آن را کنار می‌گذاریم. مثلاً، «نصف» ۵ را ۲ می‌گیریم. مقدار واقعی آن ۲/۵ است، و ما با کسرش کاری نداریم. پس «نصف» ۳ می‌شود ۱، و «نصف» ۱ صفر است. البته «نصف» ۴ همان ۲ است، و در مورد همه عددهای زوج، وضع همین طور است.

این مرحله باید فوری انجام شود. نباید بگوییم «نصف ۴ می‌شود ۲» یا چیزی مثل این. نگاه می‌کنیم به ۴ و می‌گوییم ۲. حالا خودتان این کار را با رقمهای زیر انجام بدهید:

۱، ۶، ۳، ۹، ۵، ۸، ۶، ۷، ۵، ۴، ۲، ۸، ۵، ۴، ۶، ۲

در رقمهای فرد یعنی ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ این وضع خاص وجود دارد که کسرها را حذف می‌کنیم. اما در رقمهای زوج یعنی ۲، ۴، ۶ و ۸ همان نتیجه معمولی به کار می‌رود.

ضرب اعداد در شش

اکنون از مفهوم «نصف» که در بالا گفتیم، استفاده می‌کنیم. بخشی از دستور ضرب کردن در ۶ چنین است:

هر عدد را با «نصف» همسایه‌اش جمع کنید.

فعلاً فرض می‌کنیم که دانستن همین دستور برای ضرب کردن در ۶ کافی است و مسئله زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 48026 \\ \hline \end{array}$$

مرحله اول: اولین «عدد» این عدد طولانی ۴ است که همسایه ندارد پس با چیزی جمع نمی‌شود:

$$\begin{array}{r} 0 \ 6 \ 2 \ 2 \ 0 \ 8 \ 4 \times 6 \\ \hline 4 \end{array}$$

مرحله دوم: دومین عدد ۸ است و همسایه آن ۴ است، پس ۸ را با نصف ۴ (یعنی ۲) جمع می کنیم، می شود ۱۰:

$$\begin{array}{r} 0 \ 6 \ 2 \ 2 \ 0 \ 8 \ 4 \times 6 \\ \hline 10 \ 4 \end{array}$$

مرحله سوم: عدد بعدی صفر است. نصف همسایه اش، ۸ را با آن جمع می کنیم. صفر بعلاوه ۴ می شود ۴، ده بر یک هم داریم:

$$\begin{array}{r} 0 \ 6 \ 2 \ 2 \ 0 \ 8 \ 4 \times 6 \\ \hline 50 \ 4 \end{array}$$

مرحله اخیر را در مورد عددهای ۲، ۲، ۶ و صفر متوالیاً انجام می دهیم:

$$\begin{array}{r} 0 \ 6 \ 2 \ 2 \ 0 \ 8 \ 4 \times 6 \\ \hline 3732504 \end{array}$$

می خواهید ببینید چقدر این کار راحت است؟ خودتان دو ضرب زیر را انجام بدهید:

$$\begin{array}{r} 0 \ 4 \ 4 \ 0 \ 4 \times 6 \\ \hline 0 \ 28688424 \times 6 \end{array}$$

حاصل اولین ضرب ۲۶۴۲۴ و جواب دومی ۱۷۲۱۳۰۵۴۴ است. با کاری که تا اینجا کردیم، جواب درست مسئله ها پیدا شد. ولی این دستور برای ضرب کردن در ۶ کامل نیست. دستور کامل به صورت زیر است:

هر «عدد» را با نصف همسایه اش جمع کنید؛ اگر «عدد» فرد است، ۵ تا دیگر هم به آن اضافه کنید.

در اینجا «فرد» بودن «عدد» مطرح است و کاری نداریم به این که «همسایه» فرد است یا نه. فقط نگاه می کنیم به «عدد» که ببینیم فرد

است یا زوج. اگر زوج بود، نصف همسایه‌اش را با آن جمع می‌کنیم. اگر فرد بود، اول ۵ تا به آن می‌افزاییم و بعد «نصف» همسایه را، همان طور که در بالا عمل کردیم. مثلاً ضرب زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{r} 6 \times 25034 \\ \hline \end{array}$$

رقمهای ۳ و ۵ فرد هستند. این موضوع با یک نگاه به مضروب معلوم می‌شود. وقتی ضمن عمل به این ۳ و ۵ می‌رسیم، باید با توجه به فرد بودن این رقمها یک ۵ دیگر هم به مجموع بیفزاییم. این ضرب چنین انجام می‌شود:

مرحله اول:

$$\begin{array}{r} 6 \times 25034 \\ \hline \end{array}$$

۲ زوج است و همسایه ندارد؛ آن را عیناً در زیر می‌نویسیم ۲

مرحله دوم:

$$\begin{array}{r} 6 \times 25034 \\ \hline \end{array}$$

۵ فرد است! ۵ بعلاوه ۵ بعلاوه «نصف» ۲ می‌شود ۱۱ ۲ ۰۱

مرحله سوم:

$$\begin{array}{r} 6 \times 25034 \\ \hline \end{array}$$

«نصف» ۵ می‌شود ۲؛ ده بریک را هم با آن جمع می‌کنیم ۲ ۰۱ ۳

مرحله چهارم:

$$\begin{array}{r} 6 \times 25034 \\ \hline \end{array}$$

۲ ۰۱ ۳ ۸

۳ فرد است! ۳ بعلاوه ۵ می‌شود ۸

مرحله پنجم:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 5 \quad 2 \quad \times \quad 6 \\ \hline 5 \quad 8 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

۴ بعلاوه «نصف» ۳

مرحله ششم:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 5 \quad 2 \quad \times \quad 6 \\ \hline 6 \quad 5 \quad 8 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

۴ بعلاوه «نصف» ۴

مرحله آخر:

$$\begin{array}{r} * \quad * \\ 0 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 5 \quad 2 \quad \times \quad 6 \\ \hline 2 \quad 6 \quad 5 \quad 8 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

صفر بعلاوه «نصف» ۴

جواب ۲۶۵۸۳۱۲ است. البته این همه توضیح، صرفاً به خاطر آن است که در آغاز استفاده از این روش، موضوع تا حد امکان روشن تر شود. عملاً این کار سریعتر انجام می شود زیرا مرحله جمع کردن با نصف همسایه، بسیار ساده است. با قدری تمرین، این روش جنبه آگاهانه خود را از دست می دهد و به حالت خود کار در می آید.

شاید با انجام دو ضرب زیر، این موضوع برایتان روشن تر شود:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 8 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad \times \quad 6 \\ \hline 0 \quad 6 \quad 2 \quad 5 \quad 0 \quad 1 \quad 8 \quad 8 \quad \times \quad 6 \\ \hline \end{array}$$

حاصل اولین ضرب ۴۹۴۵۴ و حاصل دومی ۳۷۵۵۱۱۲۸ است. اعدادی که آنها را در ۶ ضرب کردیم نسبتاً طولانی بودند. آیا این روش برای عددهای یک رقمی مثلاً ۸ ضرب در ۶ هم قابل استفاده است؟

بله، هست، بی آنکه هیچ تغییری لازم شود. مثلاً ببینیم با این روش حاصل ۸ ضرب در ۶ چه می شود:

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$$

همسایه وجود ندارد؛ ۸ بعلاوه «نصف» همسایه همان ۸؛

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$$

صفر بعلاوه «نصف» ۸ می شود ۴

وقتی عددی که در ۶ ضرب می شود فرد باشد، مثل ۷، در مرحله اول باید ۵ را اضافه کنیم. البته در مرحله دوم آن را اضافه نمی کنیم، زیرا صفر عدد زوج به شمار می آید:

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$$

۷ بعلاوه ۵، بعلاوه «نصف» هیچ

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$$

صفر بعلاوه «نصف» ۷، بعلاوه «ده بر یک»

احتمالاً اغلب اشخاص فکر می کنند که جدول ضرب را برای ۶ از بر هستند. شاید بیش از نصف کسانی که مستقیماً با ریاضیات سرو کار ندارند، از این لحاظ به خود مطمئن هستند، گرچه این احساس همیشه بجا نیست. اما در اینجا مسئله تنها این نیست. شیوه هایی که در این روش ضرب به کار می رود، بعداً در موارد پیچیده تری مورد استفاده مجدد قرار خواهد گرفت و صرف نظر از اینکه جدول ضرب را از بر باشیم یا نباشیم به آنها نیاز خواهیم داشت. بهترین راه مطرح کردن این روشهای جدید، به کار گرفتن آنها در مواردی است که قبلاً با آنها آشنا هستیم. در اینجا هم همین راه را در پیش گرفته ایم.

بعلاوه (نکته ای که اهمیتش بیش از آن است که به نظر می رسد)،

این شیوه نقطه آغازی برای کسب عاداتهای ذهنی مناسب در محاسبه است. لابد شما هم مطالبی در مورد عاداتهای اشخاص عادی در مطالعه، و مؤسساتی که مهارت در تند خوانی را پرورش می دهند، شنیده اید. صاحب نظران می گویند خیلی از اشخاص عادت دارند نوشته ها را حرف به حرف بخوانند، و آنچه را می خوانند هجی می کنند، یا دست کم تا حد زیادی این کار را انجام می دهند. باید در خود این عادت را ایجاد کنیم که هنگام خواندن، تمام کلمه یا عبارت را یکجا تشخیص دهیم. نکته های دیگری هم مطرح شده است. خلاصه مطلب این است که: اغلب اشخاص بد مطالعه می کنند زیرا عاداتهای آنان در خواندن کارآمد نیست.

این موضوع کلی، از بعضی لحاظ در مورد حساب هم صادق است. وقتی کسی عاداتهای بدی در نحوه انجام اعمال حساب کسب کرد، نتیجه این می شود که بخشی از وقت و انرژی خود را به هدر دهد. تنها کسانی چون حسابدارها که اغلب وقتشان صرف کار با اعداد می شود، سرانجام دستورالعملهای مناسبی برای خود پیدا می کنند. سایر افراد، حتی اگر در شغل روزمره خود با محاسبات سرو کار نداشته باشند، با اندک پشتکار و تمرین می توانند این روشها را یاد بگیرند. در این فصل و فصل بعد به برخی از این موارد خواهیم پرداخت.

یکی از این مراحل ذهنی را که بسیار ساده هم هست، قبلاً در بیان کاربرد «نصف» همسایه، ذکر کردیم. تمرین ساده ای که آنجا می کردیم این بود که با نگاه کردن به یک رقم مثل ۲ یا ۸، بلافاصله می گفتیم ۱ یا ۴، بی آنکه از هیچ مرحله ذهنی عبور کرده باشیم. جواب باید به محض دیدن ۲ یا ۸ در ذهن نقش ببندد، چنانکه به صورت یک عمل بازتابی در آید. جا دارد که خواننده به رقمهایی که برای تمرین ذکر کرده ایم برگردد و شخصاً یک بار دیگر آنها را انجام دهد.

یکی دیگر از مراحل ذهنی درست، آن است که تنها نتیجه افزودن همسایه، یا نصف همسایه را بگوییم، مثلاً در :

$$\begin{array}{r} ۰ \quad ۲ \quad ۶ \quad ۲ \quad \times \quad ۶ \\ \hline ۸ \quad ۴ \end{array}$$

اینجا رقم ۸ مجموع ۶ و نصف ۴ است. اما نباید بگوییم «نصف ۴ می شود ۲، و ۶ و ۲ می شود ۸». بلکه به ۶ و ۴ نگاه می کنیم، می بینیم نصف ۴، ۲ است و با خود می گوئیم «۶، ۸». این کار در آغاز دشوار خواهد بود، بنابراین بهتر است با خود بگوییم «۶، ۲، ۸».

مرحله دیگری که به تمرین نیاز دارد، مرحله افزودن ۵ است، وقتی که عدد (و نه همسایه) فرد باشد. مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{r} ۰ \quad ۶ \quad ۳ \quad ۴ \quad \times \quad ۶ \\ \hline ۰۰ \quad ۴ \end{array}$$

در اینجا همان طور که از نقطه «ده بر یک» بر می آید، صفر متعلق به ۱۰ است و ۱۰ مجموع ۳ و ۵ (زیرا ۳ فرد است) و ۲ (نصف ۴) است. روال درست آن است که ابتدا بگوییم «۵، ۸، ۲، ۱۰». پس از مدتی تمرین با این روش، سرانجام می توانیم آن را به صورت «۱۰، ۸» کوتاه کنیم. رقم ۵ را که به فرد بودن ۳ مربوط است اول می آوریم، زیرا در غیر این صورت ممکن است افزودن آن فراموش شود.

به همین ترتیب، وقتی نقطه ای به نشانه «ده بر یک» داریم باید آن را قبل از همسایه (برای ضرب در ۱۱) یا نصف همسایه (برای ضرب در ۶) جمع کنیم. اگر بخواهیم «ده بر یک» را به بعد از افزودن همسایه موکول کنیم، گاهی آن را فراموش خواهیم کرد. در مثال بالا، رقم بعدی به صورت زیر یافته می شود:

$$\begin{array}{r} ۰ \quad ۶ \quad ۳ \quad ۲ \quad \times \quad ۶ \\ \hline ۸۰۰ \quad ۲ \end{array}$$

به ۶ نگاه می کنیم و با افزودن «ده بر یک» می گوئیم «۷»؛ سپس با افزودن «نصف» ۳ می گوئیم «۸». بهتر است در اوایل کار، به ۶ نگاه

کنیم و با افزودن «ده بر یک» بگوییم «۷»، سپس به عنوان «نصف» ۳ بگوییم «۱»، بعد هم «۸»، و ۸ را بنویسیم.

وقتی هم «ده بر یک» و هم ۵ (مربوط به فرد بودن) باید افزوده شوند، به جای «۵» می‌گوییم «۶» و سپس خود عدد را می‌افزاییم. این کار یک مرحله را حذف می‌کند و براحتی می‌توان به آن عادت کرد.

حالا مداد و کاغذ بردارید و سعی کنید در انجام مثالهای زیر، تنها از مرحله‌های ذهنی درست استفاده کنید. جوابها در دنباله مثالها داده شده‌اند.

ضرب در یازده (با همسایه جمع کن):

$$\begin{array}{r} ۱. \ ۰۴۲۳۲ \\ \hline ۲. \ ۰۴۷۴۹۲ \end{array}$$

ضرب در دوازده (دو برابر کن و با همسایه جمع کن)

$$\begin{array}{r} ۳. \ ۰۴۲۳۲ \\ \hline ۴. \ ۰۴۷۴۹۲ \end{array}$$

ضرب در شش (با ۵ برای فرد، و با نصف همسایه جمع کن)

$$\begin{array}{r} ۵. \ ۰۲۲۲۲ \\ \hline ۶. \ ۰۲۰۰۴ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۷. \ ۰۴۲۳۲ \\ \hline ۸. \ ۰۴۷۴۸ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۹. \ ۰۲۹۰۶ \\ \hline ۱۰. \ ۰۵۲۴۴ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۱۱. \ ۰۳۸۶۵ \\ \hline ۱۲. \ ۰۴۱۱۱ \end{array}$$

جوابها به قرار زیرند:

$$\begin{array}{lll} ۱. \ ۴۶۵۵۲ & ۵. \ ۱۳۳۳۲ & ۹. \ ۱۷۴۳۶ \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} ۲. \ ۵۲۲۴۱۲ & ۶. \ ۱۲۰۲۴ & ۱۰. \ ۳۱۴۶۴ \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} ۳. \ ۵۰۷۸۴ & ۷. \ ۲۵۳۹۲ & ۱۱. \ ۲۳۱۹۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} ۴. \ ۵۶۹۹۰۴ & ۸. \ ۲۸۴۸۸ & ۱۲. \ ۲۴۶۶۶ \end{array}$$

ضرب اعداد در هفت

دستور ضرب اعداد در هفت خیلی شبیه دستور ضرب کردن در شش است:

عدد را دو برابر کنید و با نصف همسایه جمع کنید؛ اگر عدد فرد است ۵ را هم به آن بیفزایید.

فرض کنید می‌خواهیم ۴۲۴۲ را در ۷ ضرب کنیم. در این عدد هیچ رقم فردی وجود ندارد، بنابراین نیازی به افزودن ۵ اضافی نخواهیم داشت. برای حل این مثال، مثل مورد ضرب در شش عمل می‌کنیم با این تفاوت که در اینجا «عدد» دو برابر می‌شود:

مرحله اول:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ \times 7 \\ \hline 2 \end{array}$$

«عدد» ۲ را دو برابر می‌کنیم

مرحله دوم:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \\ \times 7 \\ \hline 9 \quad 4 \end{array}$$

دو برابر ۴ بعلاوه نصف همسایه

مرحله سوم:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \\ \times 7 \\ \hline 6 \quad 9 \quad 2 \end{array}$$

دو برابر ۲ بعلاوه نصف همسایه

مرحله چهارم:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \\ \times 7 \\ \hline 9 \quad 6 \quad 9 \quad 2 \end{array}$$

مرحله آخر:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \\ \times 7 \\ \hline 2 \quad 9 \quad 6 \quad 9 \quad 2 \end{array}$$

دو برابر صفر همان صفر است، نصف همسایه به آن افزوده می‌شود

حالا مثال دیگری می‌زنیم که رقمهای فرد داشته باشد. رقمهای ۳ و ۱ هر دو فردند:

مرحله اول:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 4 \end{array} \times 7$$

۲ دو برابر می‌شود؛ همسایه هم ندارد

مرحله دوم:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 8 \quad 2 \end{array} \times 7$$

دو برابر ۱، بعلاوه ۵ زیرا ۱ فرد است، می‌شود ۷، بعلاوه نصف ۲

مرحله سوم:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 8 \quad 8 \quad 2 \end{array} \times 7$$

۴ فرد نیست؛ دو برابر ۴ بعلاوه نصف ۱

مرحله چهارم:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 3 \quad 8 \quad 8 \quad 2 \end{array} \times 7$$

۵ بعلاوه دو برابر ۳، بعلاوه نصف ۴

مرحله آخر:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 2 \quad 0 \quad 3 \quad 8 \quad 8 \quad 2 \end{array} \times 7$$

دو برابر صفر، صفر است ولی نصف ۳ و «ده بریک»

با آن جمع می‌شود

مراحل ذهنی درست به قرار زیر است:

۱. اگر «ده بریک» داشته باشیم، می‌گوییم «۱».

۲. سپس به عدد بعدی نگاه کنیم تا ببینیم آیا فرد است یا نه. اگر بود، ۵ را به ده بریک می‌افزاییم، می‌گوییم «۶»، یا اگر ده بریک نداشتیم می‌گوییم «۵».

۳. به عدد نگاه می‌کنیم و آن را به طور ذهنی دو برابر می‌کنیم، مجموع ۵ و این رقم دو برابر شده را می‌گوییم. اگر مثلاً رقم ۳ بود،

می گوئیم «۵»، سپس می گوئیم «۱۱» زیرا دو برابر کردن ۳ که می شود ۶ و افزودن ۵ به آن را می توان در یک مرحله انجام داد.

۴. با نگاه کردن به همسایه، که مثلاً ۶ است، نصف آن را به آنچه قبلاً داشته ایم می افزاییم. در بالا به ۱۱ رسیده بودیم. اگر همسایه ۶ باشد، حالا می گوئیم «۱۴».

حالا بد نیست قدری با این روش کار کنیم. پرورش ذهن برای این کار خیلی با ارزش است زیرا قدرت تمرکز را افزایش می دهد و تمرکز هم عملاً کلید اصلی موفقیت است. اما این پرورش به طور آنی صورت نمی گیرد و برای این کار می توانیم چند گام مشخص را به شیوه زیر دنبال کنیم:

اول: به هر یک از رقمهای زیر نگاه کنید و بلافاصله، بدون طی هیچ مرحله میانی، دو برابر عدد را به صدای بلند بر زبان آورید (با نگاه کردن به ۳، فوراً بگویید «۶» بدون اینکه «۳» را به زبان بیاورید):

۲، ۴، ۱، ۶، ۵، ۳، ۵، ۱، ۴، ۳، ۸، ۲، ۶، ۳،

۷، ۵، ۹، ۲، ۱، ۵، ۶، ۳، ۵، ۲، ۶، ۸، ۷، ۴

دوم: در هر جفت از عددهای زیر، به رقم سمت چپ نگاه کنید و دو برابر آن را به صدای بلند بگویید (به ۳ نگاه کنید و بگویید «۶»)، سپس همسایه را با آن جمع کنید (برای جفت ۳ ۴ بگویید «۷»، «۱۵»). این روش سریع ضرب اعداد در ۱۲ است:

۲۱ ۳۴ ۲۵ ۱۱ ۲۲ ۵۲

۲۷ ۱۵ ۶۵ ۷۱ ۴۵ ۵۹

۳۲ ۳۸ ۷۴ ۵۲ ۸۲ ۴۱

سوم: در هر جفت از اعداد زیر، به رقم سمت چپ نگاه کنید و دو برابر آن را به صدای بلند بگویید، سپس نصف همسایه را با آن جمع

کنید (به ۲۶ نگاه کنید، بگویید «۷، ۴»). این کار همان «ضرب در ۷» برای عددهای زوج است:

۲۶	۲۷	۴۰	۶۱	۲۶	۴۴
۰۴	۲۲	۲۹	۸۱	۸۸	۸۹
۶۶	۴۳	۶۷	۴۹	۸۱	۰۷

چهارم: در مورد هر یک از عددهای زیر، به عدد نگاه کنید و بگویید «۵»، سپس ۵ بعلاوه دو برابر آن عدد را بر زبان آورید (با نگاه کردن به ۳، بگویید «۵، ۱۱»):

۷، ۵، ۳، ۱، ۹، ۳، ۷، ۵، ۱

حالا دوباره این تمرین را تماماً انجام دهید!

پنجم: در هر جفت از اعداد زیر، به عدد سمت چپ نگاه کنید، بگویید «۵»، سپس ۵ بعلاوه دو برابر عدد را مثل گام قبل، بر زبان آورید، بعد از آن بلافاصله نصف همسایه را هم بیفزایید و حاصل افزودن این نصف را بگویید (برای ۳۴ بگویید «۵، ۱۱، ۱۳»); این همان ضرب کردن عددهای فرد در ۷ است:

۱۰ ۱۲ ۱۶ ۱۸

(جوابها: ۷، ۸، ۱۵، ۱۱)

۳۰ ۳۲ ۳۸ ۳۴
۵۰ ۵۶ ۷۰ ۷۲

حالا ببینید با چه سرعتی می‌توانید اعداد را در ۷ ضرب کنید. ابتدا اعداد زیر را ضرب کنید که همگی زوج هستند و لزومی به افزودن ۵ در آنها نیست، فقط باید عدد را دو برابر کنید و با نصف همسایه جمع کنید:

۰۶۰۲ ۰۲۲۲ ۰۲۰۲
۰۸۴۶ ۰۶۴۲ ۰۴۴۴

در پایان به اعدادی می‌پردازیم که ارقام فردی هم دارند و باید ۵ را به آنها افزود:

۰۲۵۴ ۰۳۰۲ ۰۲۲۳
(جوابها: ۱۷۷۸، ۲۱۱۴، ۱۵۶۱)

۰۱۳۲ ۰۶۱۸ ۰۲۷۲

ضرب اعداد در پنج

دستور ضرب اعداد در پنج شبیه دستورهای مربوط به ۶، ۷ ولی از آنها ساده‌تر است. به جای افزودن به «عدد» که در مورد ۶ داشتیم، یا دو برابر کردن آن در مورد ۷، در اینجا فقط به «عدد» نگاه می‌کنیم. نگاه می‌کنیم ببینیم عدد فرد است یا زوج. اگر فرد بود، مثل گذشته ۵ را به آن می‌افزاییم:

نصف همسایه، بعلاوه ۵ اگر عدد فرد است.

فرض کنید می‌خواهیم ۴۲۶ را در ۵ ضرب کنیم:

$$\begin{array}{r} ۰ \ ۴ \ ۲ \ ۶ \\ \times \ ۵ \\ \hline ۰ \end{array}$$

ابتدا به ۶ نگاه می‌کنیم، زوج است؛ پس لازم نیست ۵ را بیفزاییم؛ همسایه هم وجود ندارد

$$\begin{array}{r} ۰ \ ۴ \ ۲ \ ۶ \\ \times \ ۵ \\ \hline ۳ \ ۰ \end{array}$$

به ۲ نگاه می‌کنیم، زوج است؛ نصف ۶ را اختیار می‌کنیم

$$\begin{array}{r} ۰ \ ۴ \ ۲ \ ۶ \\ \times \ ۵ \\ \hline ۱ \ ۳ \ ۰ \end{array}$$

به ۴ نگاه می‌کنیم، زوج است؛ نصف ۲ را می‌گیریم

$$\begin{array}{r} 5 \times 226 \\ \hline 10540 \end{array}$$

به صفرنگاه می‌کنیم، زوج است؛ نصف ۴ رادر زیر می‌نویسیم

حال اگر در مضروب رقم فردی موجود باشد، ۵ را می‌افزاییم:

$$\begin{array}{r} 5 \times 236 \\ \hline 1180 \end{array}$$

مثل گذشته

$$\begin{array}{r} 5 \times 236 \\ \hline 1180 \end{array}$$

۳ فرد است؛ ۵ بعلاوه ۳ را می‌گیریم

$$\begin{array}{r} 5 \times 236 \\ \hline 1180 \end{array}$$

این کار آسان است. با ارقام خیلی کمتر کار داریم. هر چند اندکی غیر عادی به نظر می‌رسد چون نوعی شگرد ذهنی به میان می‌آید: در موضعی که مشغول کاریم، به جای عدد از همسایه استفاده می‌کنیم. در واقع این تمرین خوبی است که موضع عمل را گم نکنیم. بعدها، برای ضرب عددی طولانی در عدد طولانی دیگر، خواهیم دید که برای به خاطر سپردن موضع خود در مضروب، به میزان معینی تمرکز نیاز داریم. این روش ضرب اعداد در ۵، تا حدی یک تمرین مقدماتی است. اعداد زیر را با روشی که در بالا گفتیم، در ۵ ضرب کنید:

۱. ۰۴۴۴	۴. ۰۴۳۴	۶. ۰۲۵۶۴۱۳
۲. ۰۴۲۸	۵. ۰۶۴۷	۷. ۰۱۴۲۸۵۷
۳. ۰۴۲۴۸۸۲		

جوابها به صورت زیرند:

۱. ۲۲۲۰	۴. ۲۱۷۰	۶. ۱۲۸۲۰۶۵
۲. ۲۱۴۰	۵. ۳۲۳۵	۷. ۷۱۴۲۸۵
۳. ۲۱۲۴۴۱۰		

ضرب اعداد در هشت و نه

برای ضرب کردن در ۸ و ۹ یک مرحله ذهنی تازه داریم، که موجب پرورش بیشتر ذهن می شود. این مرحله جدید عبارت است از کم کردن «عدد» از ۹ یا از ۱۰. فرض کنید می خواهیم ۴۵۶۷ را در ۸ یا ۹ ضرب کنیم؛ در هر دو مورد، مرحله اول این است که رقم سمت راست عدد طولانی (یعنی ۷) را از ۱۰ کم کنیم. ابتدا با نگاه کردن به رقم انتهایی سمت راست ۴۵۶۷ می گوئیم «۳». برای این کار، عبارت «۷ از ۱۰ می شود ۳» را بر زبان نمی آوریم و باید واکنش ما فوری باشد. به ۷ نگاه می کنیم و می گوئیم «۳». برای آنکه سرعت واکنش خود را بسنجید، به رقمهای زیر نگاه کنید و فوراً نتیجه کاستن آن از ۱۰ را بر زبان آورید:

۷, ۶, ۹, ۲, ۸, ۱, ۷, ۴, ۲, ۳, ۹, ۶, ۵, ۳, ۱, ۹

در مواردی لازم می شود که عدد را به جای ۱۰ از ۹ کم کنیم. در این حالت، مثلاً به ۷ نگاه می کنیم و فوراً می گوئیم «۲». این کار را هر چه سریعتر که می توانید برای رقمهای زیر انجام دهید:

۷, ۸, ۲, ۴, ۹, ۵, ۱, ۷, ۲, ۵, ۳, ۸, ۶, ۵, ۱, ۵

اکنون می توانید هر عددی را سریع و راحت و بدون استفاده از جدول ضرب، در ۹ ضرب کنید. بهترین راه بیان این روش، ارائه دستوری است که لازم نیست آن را از بر کنید زیرا با اندکی تمرین خود به خود در ذهن شما نقش می بندد. دستور مورد نظر، به این صورت است:

ضرب اعداد در نه

۱. رقم انتهایی سمت راست مضروب را از ده کم کنید. نتیجه، رقم سمت راست جواب است.

۲. در مورد یکایک رقمهای بعدی، تا آخرین رقم، به نوبت آنها از نه کم کنید و با همسایه جمع کنید.

۳. در مرحله آخر، وقتی به صفری که جلوی عدد طولانی قرار گرفته می‌رسید، یکی از همسایه کم کنید و نتیجه را به عنوان رقم سمت چپ جواب بنویسید.

البته در همه این مراحل، اگر نقطه‌ای (به نشانه ده بر یک) وجود داشته باشد، باید آن را مانند همیشه افزود.

اکنون مثالی از کارکرد این دستور را شرح می‌دهیم: ۸۷۶۹ ضرب در ۹.

$$\begin{array}{r} 9 \times 9876 \\ 10287 \end{array}$$

مرحله اول: در عدد ۸۷۶۹، رقم ۹ را از ۱۰ کم می‌کنیم، و رقم ۱ جواب را به دست می‌آوریم.

مرحله دوم: رقم ۶ را از ۹ کم می‌کنیم (می‌شود ۳) و همسایه را که ۹ است با آن جمع می‌کنیم؛ نتیجه ۱۲ است، پس ۲ را با یک نقطه می‌نویسیم.

مرحله سوم: ۷ از ۹ می‌شود ۲، با همسایه (۶) می‌شود ۸، و با نقطه ده بر یک می‌شود ۹.

مرحله چهارم: ۸ از ۹ می‌شود ۱، با همسایه می‌شود ۸.

مرحله پنجم: این آخرین مرحله است و به صفر سمت چپ رسیده‌ایم. پس یکی از رقم سمت چپ ۸۷۶۹ کم می‌کنیم، پس رقم سمت چپ جواب ۷ است.

این ضرب را خودتان انجام دهید: ۸۸۸۸ ضرب در ۹.

$$9 \times 8888 = 80002$$

رقم انتهایی جواب ۲ است، زیرا ۸ از ۱۰ می‌شود ۲. در این مثال، ده بر یک نداریم و رقم سمت چپ ۷ است یعنی یکی کمتر از رقم ۸ سمت چپ

مضروب. جواب درست ۷۹۹۹۲ در می آید.

چند مثالی برای تمرین در زیر آورده شده که از آسان شروع می شود و کم کم به مثالهای سخت تر می رسد. جوابها را نیز در آخر آنها داده ایم.

- | | | |
|---------|-----------|-------------|
| ۱. ۰۳۳ | ۲. ۰۹۸۶۵۴ | ۳. ۰۸۶۷۳۳ |
| ۴. ۰۶۲۶ | ۵. ۰۸۰۵ | ۶. ۰۷۷۵۴۹۶۵ |

جوابها:

- | | | |
|---------|-----------|-------------|
| ۱. ۲۹۷ | ۲. ۸۸۷۸۸۶ | ۳. ۷۸۰۵۹۷ |
| ۴. ۵۶۳۴ | ۵. ۷۲۴۵ | ۶. ۶۹۷۹۴۶۸۵ |

ضرب اعداد در هشت

۱. رقم اول: از ده بکاهید و دو برابر کنید.

۲. رقمهای میانی: از نه بکاهید و نتیجه را دو برابر کنید، سپس با همسایه جمع کنید.

۳. رقم سمت چپ: از رقم سمت چپ مضروب، دو تا کم کنید.

ضرب کردن در ۸ مثل ضرب کردن در ۹ است با این تفاوت که اینجا دو برابر کردن هم داریم و اینکه در آخرین مرحله، از رقم سمت چپ مضروب، به جای یکی، ۲ تا کم می کنیم. مثال:

$$\begin{array}{r} ۰۷۸۹ \times ۸ \\ \hline ۲ \end{array}$$

این ۲، نتیجه کاستن ۹ از ۱۰ و دو برابر کردن حاصل است. حالا در

عدد ۷۸۹ به ۸ می‌رسیم که یک «رقم میانی» به شمار می‌آید، بنابراین آن را از ۹ می‌کاهیم و حاصل را دو برابر می‌کنیم و سپس با همسایه جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} \textcircled{0} \textcircled{7} \textcircled{8} \textcircled{9} \times 8 \\ \hline 012 \end{array}$$

پس ۷ نیز رقم «میانی» است؛ پایان کار وقتی است که به صفر جلوی ۷۸۹ برسیم، پس در مورد ۷، رقم ۲ (حاصل کاستن ۷ از ۹) را دو برابر می‌کنیم و این ۴ را با ۸ و با ده بر یک، جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} \textcircled{0} \textcircled{7} \textcircled{8} \textcircled{9} \times 8 \\ \hline 03012 \end{array}$$

دست آخر، ۲ تا از ۷ می‌کاهیم و با ده بر یک جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} \textcircled{0} \textcircled{7} \textcircled{8} \textcircled{9} \times 8 \\ \hline 603012 \end{array}$$

می‌بینید که پس از آشنا شدن با این روش، چقدر کار ساده‌تر و آسانتر از ضرب معمولی است. در ضرب معمولی نه تنها باید در استفاده از جدول ضرب اشتباه نکنیم (مثلاً بسیار کسان در مورد هشت ۷ تا، هشت ۸ تا و هشت ۹ تا که در اینجا لازم است دچار تردید می‌شوند)، بلکه دوبار هم باید رقم ۷ دهگان را به مرحله بعد منتقل کنیم که در آن امکان اشتباه پیش می‌آید. اما در روش بدون جدول، تنها ده بر یک‌ها را باید منتقل کنیم.

البته تنها وقتی می‌توانیم بگوییم به این روش تسلط یافته‌ایم که نیازی نداشته باشیم به هیچ «دستور»ی فکر کنیم. برای این منظور باید قدری تمرین کنیم تا این دستور کار، ملکه ذهنمان شود. مسلماً نیم ساعت یا یک ساعت تمرین با این روش، خیلی کمتر از ساعتها تمرین مکرری است که کودکان در مدرسه صرف یاد گرفتن جدول ضرب می‌کنند.

برای تمرین، اعداد زیر را در ۸ ضرب کنید:

۰۷۳ (جواب: ۵۸۴)

۰۴۹ (جواب: ۳۹۲)

۰۶۹

۰۹۸

۰۷۷۷

۰۸۵۸۶

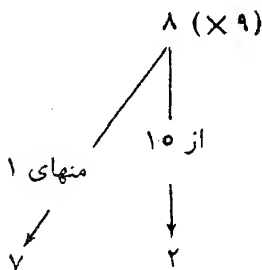
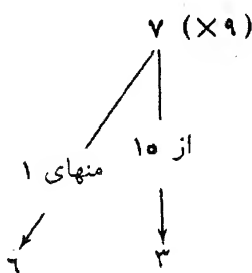
۰۶۲۸۸

۰۳۶۶۹

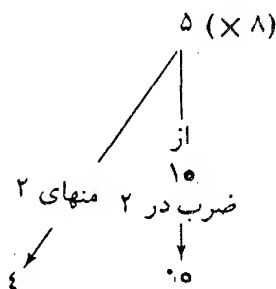
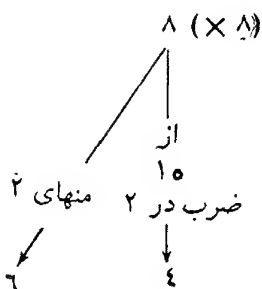
همین روش را می‌توانیم برای اعداد یک رقمی هم به کار ببریم. فرض کنید می‌خواهیم عدد ۷ را در ۹ (که دو برابر کردن ندارد!) ضرب کنیم. در اینجا عدد میانی نداریم. پس مثل همیشه در مرحله اول ۷ را از ۱۰ می‌کاهیم، سپس مانند همه مراحل آخر یکی را از ۷ کم می‌کنیم. نتیجه به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{array}{r} 0 \ 7 \times 9 \\ \hline 6 \ 3 \end{array}$$

برای این اعداد یک رقمی الگوی ساده‌ای به صورت زیر به دست می‌آید:



همین موضوع برای ضرب کردن در ۸ هم صادق است، ولی در اینجا داریم «از ۱۰» ضرب در ۲ و «منهای ۲»:



در این روش، هنگام ضرب کردن رقمهای کوچکتر (۱ تا ۵) در ۸، ده بر یک خواهیم داشت. البته معمولاً نیاز به این کار پیش نمی آید زیرا همه ما جدول ضرب را برای این اعداد کوچک، خوب بلدیم. فقط در مورد اعداد بزرگتر (مثل ۷ هشت تا) است که بعضی افراد دچار اشکال می شوند. در این گونه موارد، در نموداری که برای ۸ رسم کردیم، ده بر یک یک وارد نمی شود. در مورد ضرب در ۹ هم هیچ وقت ده بر یک نخواهیم داشت.

اگر کسی در به خاطر سپردن جدول ضرب اشکالی داشته باشد، می تواند از این نمودارها استفاده کند. برای این کار لزومی ندارد هر بار مراحل یاد شده را انجام دهد. با چند بار ترسیم یا حتی تجسم این نمودارها، زمینه ای در ذهن ایجاد می شود تا فوراً تشخیص داده شود که ۷ نه تا می شود ۶۳، تا آخر. در واقع هم آنچه مورد نظر است، چیزی جز همین زمینه نیست. تنها نکته های منفردند که به یاد آوردنشان دشوار است. مثلاً فرض کنید که چند ماه کسی را که دوست نزدیکتان بوده ندیده باشید. شاید شماره تلفن او را به یاد نیاورید زیرا شماره تلفن، نکته منفردی است. اما احتمالاً رقمهای سمت چپ این شماره را به یاد خواهید آورد، زیرا این رقمها تابع الگوی خاصی هستند: این رقمها بستگی دارند به اینکه دوستان در کدام منطقه شهر زندگی می کند، و شما قاعدتاً محل زندگی او را به خاطر دارید. تطبیق دادن یک نکته با هر نوع الگو، موجب تثبیت آن نکته در ذهن می شود. در مورد ریاضیات، بهترین الگو،

نحوه استخراج مطلب است. هیچ ریاضیدانی قضیه مورد نظرش را صرفاً به یاری نیروی حافظه و به مثابه واقعیتی منفرد، به یاد نمی آورد. معمولاً طرحی کلی از اثبات یا نحوه به دست آوردن آن قضیه در ذهن او به اندیشه خود قضیه پیوسته است. در مورد کار با این نمودارها هم همین گفته صادق است. وقتی هفت ۹ تا را می خواهیم، «۶۳» به لایه جلویی ضمیرمان می آید و برای ظهور آن، نمودار در زمینه ذهن نقش می بندد.

ضرب اعداد در چهار

اغلب افراد، حتی آنها که کمتر از همه با ریاضیات سر و کار دارند، نسبت به توانایی خود در ضرب کردن اعداد در ۴ مطمئن هستند. با این حال، برای کامل بودن مطلب، نحوه انجام این کار را با روشی شبیه آنچه تا کنون دیده ایم، بیان می کنیم.

برای این کار از ترکیب دو مطلب که قبلاً ذکر شده استفاده می کنیم. اولی، ضرب کردن در ۹ است به صورتی که پیشتر گفتیم و دومی، اختیار کردن «نصف» (در واقع نصف کوچکتر)، و افزودن ۵ برای رقمهای فرد است. به عبارت دقیقتر، ضرب اعداد در ۴، مثل ضرب کردن در ۹ است با این تفاوت که به جای «جمع کردن با همسایه»، که در مورد ۹ داشتیم، در اینجا با «نصف» همسایه جمع می کنیم و طبق معمول برای رقمهای فرد ۵ را هم می افزاییم. بیان کامل این دستور به صورت زیر است:

۱. رقم سمت راست عدد داده شده را از ده کم کنید و اگر این رقم فرد بود پنج را به آن بیفزایید.
۲. رقمهای عدد داده شده را به طور متوالی از نه کم کنید، اگر رقم فرد بود پنج را بیفزایید، و با نصف همسایه جمع کنید.
۳. وقتی به صفر جلوی عدد داده شده رسیدید، از نصف همسایه این صفر، یکی کم کنید.

مثال ۱: ۲۵۶۸۴ ضرب در ۴

مرحله اول: در عدد ۲۵۶۸۴، رقم ۴ را از ۱۰ کم می کنیم:

$$\begin{array}{r} 0 \ 2 \ 0 \ 6 \ 8 \ 4 \times 4 \\ \hline 6 \end{array}$$

مرحله دوم:

$$\begin{array}{r} 0 \ 2 \ 0 \ 6 \ 8 \ 4 \times 4 \\ \hline 3 \ 6 \end{array}$$

۳، حاصل کاستن ۸ از ۹، بعلاوه نصف ۴ است

مرحله سوم:

$$\begin{array}{r} 0 \ 2 \ 0 \ 6 \ 8 \ 4 \times 4 \\ \hline 7 \ 3 \ 6 \end{array}$$

۷، حاصل کاستن ۶ از ۹، بعلاوه نصف ۸ است

مرحله چهارم:

$$\begin{array}{r} 0 \ 2 \ 0 \ 6 \ 8 \ 4 \times 4 \\ \hline 0 \ 2 \ 7 \ 3 \ 6 \end{array}$$

۰۲، حاصل کاستن صفر از ۹، بعلاوه نصف ۶ است

مرحله پنجم:

$$\begin{array}{r} 0 \ 2 \ 0 \ 6 \ 8 \ 4 \times 4 \\ \hline 8 \ 0 \ 2 \ 7 \ 3 \ 6 \end{array}$$

۸، حاصل کاستن ۲ از ۹، بعلاوه ده بر یک است

مرحله آخر:

$$\begin{array}{r} 0 \ 2 \ 0 \ 6 \ 8 \ 4 \times 4 \\ \hline 0 \ 8 \ 0 \ 2 \ 7 \ 3 \ 6 \end{array}$$

صفر، نصف ۲ منهای ۱ است

مثال ۲: در مثال ۱، چون همه رقمهای ۲۵۶۸۴ زوج بودند نیازی به

«افزودن ۵» پیش نیامد. در این مثال برخی از رقمها فردند. عدد

۳۶۵۱۸۷ را در ۴ ضرب کنید.

مرحله اول:

$$\begin{array}{r} ۰ \ ۳ \ ۶ \ ۵ \ ۱ \ ۸ \ ۷ \times ۴ \\ \hline ۸ \end{array}$$

۷ از ۱۵ می شود ۳، چون ۷ فرد است، ۵ را هم می افزاییم

مرحله دوم:

$$\begin{array}{r} ۰ \ ۳ \ ۶ \ ۵ \ ۱ \ ۸ \ ۷ \times ۴ \\ \hline ۲ \ ۸ \end{array}$$

۸ از ۹ می شود ۱، بعلاوه نصف ۷

مرحله سوم:

$$\begin{array}{r} ۰ \ ۳ \ ۶ \ ۵ \ ۱ \ ۸ \ ۷ \times ۴ \\ \hline ۷ \ ۴ \ ۸ \end{array}$$

این ۷، حاصل کاستن ۱ از ۹ است، بعلاوه ۵ بعلاوه نصف ۸

مرحله های چهارم، پنجم و ششم: مثل مراحل قبل عمل می کنیم. توجه کنید که ۳ و ۵ فردند و برای آنها باید ۵ را افزود:

$$\begin{array}{r} ۰ \ ۳ \ ۶ \ ۵ \ ۱ \ ۸ \ ۷ \times ۴ \\ \hline ۰ \ ۴ \ ۶ \ ۰ \ ۰ \ ۷ \ ۴ \ ۸ \end{array}$$

مرحله آخر:

$$\begin{array}{r} ۰ \ ۳ \ ۶ \ ۵ \ ۱ \ ۸ \ ۷ \times ۴ \\ \hline ۱ \ ۰ \ ۴ \ ۶ \ ۰ \ ۰ \ ۷ \ ۴ \ ۸ \end{array}$$

این ۱، برابرست با نصف ۳، منهای ۱ بعلاوه ده بر یک

در صورت تمایل می توانید ضربهای زیر را با این روش انجام دهید:

$$۱۰. \ ۰ \ ۲ \ ۶ \ ۸ \ ۸ \times ۴$$

$$۳۰. \ ۰ \ ۲ \ ۲ \ ۷ \ ۸ \ ۴ \ ۷ \times ۴$$

$$۲۰. \ ۰ \ ۸ \ ۶ \ ۰ \ ۲ \ ۲ \ ۲ \times ۴$$

$$۴۰. \ ۰ \ ۵ \ ۴ \ ۶ \ ۱ \ ۸ \times ۴$$

جوابها:

۱. ۱۵۷۵۲ ۲. ۳۴۴۱۷۶۸ ۳. ۹۹۱۳۸۸ ۴. ۲۱۸۴۷۲

در مقایسه با تمرینهایی که برای یاد گرفتن جدول ضرب لازم است، با مقدار خیلی کمی تمرین، این کار برایتان آسان خواهد شد. بعد از چند ساعت، این اعمال برای ما به صورت کاملاً طبیعی در می آید.

ضرب اعداد در رقمهای دیگر

ضرب اعداد در سه

ضرب کردن در ۳ مثل ضرب کردن در ۸ است و تنها چند تفاوت با آن دارد. به جای جمع کردن با همسایه که در مورد ۸ داشتیم، در اینجا تنها با «نصف» همسایه جمع می کنیم. این را هم البته به یاد داریم که اگر عدد فرد بود، ۵ اضافی را هم می افزاییم. جمع کردن با نصف همسایه همیشه ۵ اضافی برای عددهای فرد را به همراه دارد. می خواهیم ۲۵۸۸ را در ۳ ضرب کنیم.

۱. رقم اول: از ده بکاهید و دو برابر کنید برای عددهای فرد، پنج را بیفزایید.

۲. رقمهای میانی: عدد را از نه بکاهید و حاصل را دو برابر کنید، سپس با نصف همسایه جمع کنید. اگر عدد فرد بود، با پنج هم جمع کنید.

۳. رقم سمت چپ: رقم سمت چپ مضروب را نصف کنید؛ سپس دو تا از آن بکاهید.

مرحله اول:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 2 \quad 5 \quad 8 \quad 8 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$

این ۴ حاصل کاستن ۸ از ۱۵ ضرب در دو است؛ همسایه نداریم ۴

مرحله دوم:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 2 \quad 5 \quad 8 \quad 8 \quad \times \quad 3 \\ \hline \quad \quad 6 \quad 4 \end{array}$$

این ۶، حاصل کاستن ۸ از ۹، ضرب در دو است،
بعلاوه نصف ۸

مرحله سوم:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 2 \quad 5 \quad 8 \quad 8 \quad \times \quad 3 \\ \hline \quad 0 \quad 7 \quad 6 \quad 4 \end{array}$$

۵ از ۹، ضرب در دو؛ بعلاوه ۵، بعلاوه نصف ۸

مرحله چهارم:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 2 \quad 5 \quad 8 \quad 8 \quad \times \quad 3 \\ \hline \quad 0 \quad 7 \quad 0 \quad 7 \quad 6 \quad 4 \end{array}$$

مرحله آخر:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 2 \quad 5 \quad 8 \quad 8 \quad \times \quad 3 \\ \hline 0 \quad 7 \quad 0 \quad 7 \quad 6 \quad 4 \end{array}$$

این صفر، نصف ۲ است، بعلاوه ده بر یک، منهای ۲

در آخرین مرحله، مثل همیشه رقم سمت چپ جواب را از رقم انتهایی سمت چپ مضروب به دست می آوریم. هنگام ضرب کردن در ۸، این رقم آخر جواب را با کاستن ۲ از رقم انتهایی سمت چپ مضروب به دست می آوردیم. اکنون برای ضرب کردن در ۳، از نصف آن رقم، ۲ را می کاهیم. گاه همانند مثال اخیر، نصف رقم انتهایی سمت چپ فقط ۱ است و گاه هم صفر. در همه این موارد، عملاً ده بر یک یا بیست بر دو داریم، در نتیجه وقتی ۲ را می کاهیم، صفر باقی می ماند. این موضوع در مثال ما دیده شد.

ضرب اعداد در دو

ضرب کردن در ۲، کار پیش پا افتاده‌ای است. در روال دستورالعملهای ما، رقمها به طور متوالی در ۲ ضرب می‌شوند و با همسایه کاری نداریم (برای دو برابر کردن هر عدد می‌توانیم آن را با خودش جمع کنیم، پس لزومی ندارد که حتی قسمت ضرب در ۲ جدول ضرب را به خاطر بسپاریم).

ضرب اعداد در یک

ضرب کردن هر عدد در یک، تغییری در آن نمی‌دهد. عدد، هر قدر هم طولانی باشد وقتی در ۱ ضرب شود خودش نتیجه می‌شود: مثلاً ۱۷۲۵۵ ضرب در ۱ برابرست با ۱۷۲۵۵. پس این دستور را می‌توان بیان کرد: یکایک رقمهای عدد مفروض را عیناً زیرش بنویسید.

چند دستور اخیر، برای ضرب کردن در رقمهای کوچک را تنها به خاطر کامل شدن مطلب ذکر کردیم. با این حال، توجه به این نکته اهمیت دارد که در همه موارد، برای ضرب کردن در هر رقمی، عملهایی که واقعاً لازم‌اند تعدادشان کم است و همه ساده هستند. کاستن از ۹، دو برابر کردن، اختیار کردن «نصف»، و جمع کردن با همسایه - اینها کل عملهایی است که لازم می‌شود. با یکی دو ساعت تمرین، این کارها حالت طبیعی و خود کار پیدا می‌کنند.

به همین دلیل بود که پروفیسور تراختنبرگ اعتقاد داشت، روشهای این فصل خیلی به درد بچه‌ها می‌خورد. آنان مدتها پیش از آنکه بتوانند جدول ضرب را به طور کامل حفظ کنند، براحتی قادر به استفاده از این روشها هستند. البته، با این روشها می‌توانند هر ضربی را با اعدادی هر قدر طولانی، انجام دهند. هر ضرب یک رقمی با استفاده از این دستورها، یک حاصلضرب فرعی مربوط به ضرب معمولی را می‌دهد، و مجموع کلی با جمع کردن ستونها به روش معمولی به دست می‌آید:

۳	۷	۶	۵	۴	X	۲	۹	۸	
۳	۰	۱	۲	۳	۲	با استفاده از دستور، ۳۷۶۵۴ را در ۸ ضرب کنید			
۲	۳	۸	۸	۸	۶	دستور ضرب اعداد در ۹ را به کار برید			
۱	۵	۰	۶	۱	۶	دستور ضرب در ۴ را به کار برید			
۱	۸	۷	۵	۱	۶	۹	۲	جواب، از جمع ستونها به دست می آید	

پس، کودکی که فقط ساده ترین نوع جمع و تفریق کردن را یاد گرفته باشد می تواند ضربهای طولانی را بی معطلی انجام دهد.

یادآوری: شیوه هایی از روش تراختنبرگ که در این فصل آمده، عموماً به بزرگسالان نیز تدریس می شود. در مورد بزرگسالان، هدف چیز دیگری است. آنها قبلاً، در روزگار نوجوانی، صدها ساعت وقت خود را صرف به خاطر سپردن جدول ضرب کرده اند و کم و بیش به آن تسلط دارند. این روش تازه، جاهای خالی را پر می کند. تأثیر روانی رویارویی با موضوع از دیدگاهی تازه چنان است که موارد تردید آمیز جدول را به طور قطعی در ذهن آنان تثبیت می کند. بعلاوه، همان طور که قبلاً گفته شد، تازگی این روش موجب برانگیختن دوباره توجه نسبت به موضوع می شود و این به نوبه خود نیمی از ماجراست. تجربه مؤسسه تراختنبرگ طی یک دوره سیزده ساله اهمیت این نکات را نشان می دهد.

چکیده مطالب

پس از مقدار معینی تمرین، دیگر نیازی به دستورها نیست. پرداختن به حل مثالها سبب می شود که این کار به صورت نیمه خود کار در آید و همین بهترین راه فرا گرفتن دستورهاست. با وجود این، برای رعایت خواسته کسانی که تمایلی به این موضوع دارند، روشهایی را که در این فصل عرضه شده، در اینجا تکرار می کنیم. در بیان دستورها قرار بر این است که منظور از «عدد» رقمی از مضروب است که در زیر آن، رقم

بعدی جواب نوشته خواهد شد، و «همسایه» رقمی است که بلافاصله در سمت راست «عدد» قرار دارد. در صورت موجود نبودن همسایه (در انتهای سمت راست عدد مفروض)، همسایه صفر است - یعنی از آن چشمپوشی می شود. همچنین، در جلوی مضروب باید صفری گذاشته شود تا فراموش نکنیم که ممکن است رقمی از جواب، زیر آن ظاهر شود.

برای ضرب در	به شیوه زیر عمل می شود:
۱۱	با همسایه جمع کنید.
۱۲	عدد را دو برابر کنید و با همسایه جمع کنید.
۶	اگر عدد فرد است ۵ را با آن جمع کنید؛ اگر زوج است چیزی نیفزایید.
	با «نصف» همسایه جمع کنید (کسرهای را در صورت وجود، حذف کنید).
۷	عدد را دو برابر کنید و اگر عدد فرد است ۵ را به آن بیفزایید و با «نصف» همسایه جمع کنید.
۵	«نصف» همسایه را اختیار کنید، و اگر عدد فرد است با ۵ جمع کنید.
۹	مرحله اول: از ۱۰ بکاهید. مرحله های میانی: از ۹ بکاهید و با همسایه جمع کنید. مرحله آخر: از رقم سمت چپ مضروب یکی کم کنید.

- ۸ مرحله اول: از ۱۵ بکاهید و دو برابر کنید.
مرحله میانی: از ۹ بکاهید، دو برابر کنید، و با همسایه جمع کنید.
مرحله آخر: از رقم سمت چپ مضروب ۲ تا کم کنید.
- ۴ مرحله اول: از ۱۵ بکاهید، و اگر عدد فرد است با ۵ جمع کنید.
مرحله های میانی: از ۹ بکاهید و با «نصف» همسایه جمع کنید، بعلاوه ۵ اگر عدد فرد است.
مرحله آخر: «نصف» رقم سمت چپ مضروب را بگیرید و یکی از آن کم کنید.
- ۳ مرحله اول: از ۱۵ بکاهید و دو برابر کنید، و اگر عدد فرد است ۵ را بیفزایید.
مرحله های میانی: از ۹ بکاهید و دو برابر کنید، اگر عدد فرد است ۵ را بیفزایید، و با «نصف» همسایه جمع کنید
مرحله آخر: «نصف» رقم سمت چپ مضروب را بگیرید و ۲ تا از آن کم کنید.
- ۲ هر یک از رقمهای مضروب را دو برابر کنید و با همسایه کاری نداشته باشید.
- ۱ همان عدد مضروب را عیناً در زیر بنویسید.
- ۵ حاصل ضرب صفر در هر عددی همیشه صفر است.

فصل دوم

ضرب سریع به روش مستقیم

در فصل اول دیدیم که چگونه عمل ضرب را می توان بدون استفاده از جدول ضرب انجام داد. با استفاده از این مطالب تازه توانستیم تسلط بهتری به جدول ضرب داشته باشیم و اشکالاتی را که احیاناً در به خاطر سپردن بعضی موارد آن داشته ایم برطرف کنیم. اکنون دیگر اطمینان بیشتری به خود داریم که هر گاه لازم شود می توانیم سریع و دقیق از جدول ضرب استفاده کنیم.

در این روش تازه برای انجام عمل ضرب، یاد گرفته ایم که با استفاده از هر جفت رقم در مضروب، رقمی از جواب را به دست آوریم. لابد به یاد دارید که «عدد» یعنی رقمی که درست بالای یک جای خالی که رقم بعدی جواب در آن وارد می شود، قرار گرفته است؛ «همسایه» رقمی از مضروب است که بلافاصله در طرف راست «عدد» واقع است. این جفتهای «عدد و همسایه» به صورتی که گفته شد، با اندک تغییراتی در این فصل نیز به کار خواهد رفت.

اکنون در روش خود برای فشردن سازی عمل ضرب، گام بعدی را برمی داریم. در اینجا یاد می گیریم هر عدد را در هر عدد دیگر، ولو آنکه هر قدر طولانی باشند ضرب کنیم، و بدون هیچ گونه مراحل میانی،

مستقیماً به جواب برسیم. مثلاً شکل فشرده ضرب ۶۲۵ در ۳۴۶ در ظاهر چنین خواهد بود:

$$\begin{array}{r} 000625 \times 346 \\ \hline 216250 \end{array}$$

حالا می خواهیم بدانیم که چنین عمل ضربی چگونه انجام می شود. جز آنچه در بالا می بینید، هیچ چیز دیگری نوشته نمی شود. سه ردیف رقمهای میانی که در ضرب معمولی داشتیم، در اینجا به کار نمی آید. صورت مسئله را، هر چه باشد، می نویسیم و سپس بلافاصله جواب آن را یادداشت می کنیم.

برای این کار دو راه وجود دارد. هر یک از این دو راه در برخی موارد برتریهایی دارد، با این حال از هر دوی آنها همیشه می توان جواب درست را به دست آورد. خوشبختانه این دو روش وجوه اشتراک زیادی دارند و براحتی می توان هر دو را یاد گرفت. در این فصل، به تشریح روشی که آن را روش «مستقیم» ضرب نامیده ایم می پردازیم. این روش بخصوص برای مواردی که رقمهای مضروب کوچک باشند، مثلاً از تعدادی رقمهای ۱ و ۲ و ۳ تشکیل شده باشند، بسیار مناسب است. در فصل بعد، به شرح روش دیگر که آن را «روش سریع» می نامیم، خواهیم پرداخت. روش اخیر، اساساً همان روش مستقیم است که نکات تازه ای به آن افزوده شده است. این نکات تازه در واقع تدابیری است برای رفع دشواریهایی که در مورد اعدادی شامل رقمهای بزرگ، مثل ۹۸۷ ضرب در ۶۸۸، پیش می آید.

هر یک از این دو روش را در هر مسئله ای می توان به کار گرفت. از هر دوی این روشها همیشه جواب درست حاصل می شود. قدری جلوتر دلیلی برای انتخاب این یا آن روش ذکر کردیم، ولی این تنها به خاطر سهولت کار است، و در هر مورد خاص، بسته به نظر خود شخص، یکی از دو روش می تواند به کار رود.

ضمناً، بد نیست یادآوری کنیم، احتمالاً پیش از آنکه روش تراختنبرگ عرضه شود، کسانی که اعمال ریاضی سریع انجام می داده‌اند، روشی شبیه به روش مستقیم به کار می برده‌اند. این «افسونگران ریاضی» که با استفاده از محاسبات ذهنی تردستی‌هایی می کردند که حیرت ناظران را بر می‌انگیخت، معمولاً اسرار روشهای خود را پیش کسی فاش نمی کردند، اما ظاهراً از روشی شبیه روش مستقیم که در اینجا بیان می شود، احیاناً با برخی تغییرات، استفاده می کردند.

بد نیست موضوع را با مثال ساده‌ای از روش مستقیم آغاز کنیم و بعد به موارد دشوار بپردازیم. پس ابتدا عدد نسبتاً کوچکی را در عدد نسبتاً کوچک دیگری ضرب می کنیم.

مضروبهای کوتاه:

ضرب اعداد دو رقمی در دو رقمی

فرض کنید می‌خواهیم ۲۳ را در ۱۴ ضرب کنیم. برای این کار، ضرب را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 23 \\ \hline \end{array}$$

(محل نوشتن جواب)

وقتی مضروب فیه عددی دو رقمی باشد، باید مثل حالت بالا، دو صفر جلوی مضروب بگذاریم.

جواب را زیر ۰۰۲۳ می‌نویسیم و در هر مرحله یک رقم از آن را با شروع از راست، ثبت می‌کنیم. به عبارت دیگر، آخرین رقم جواب را زیر ۳ می‌نویسیم و بقیه رقمهای جواب را یکی یکی به طرف چپ وارد می‌کنیم. مرحله اول: رقم سمت راست مضروب، یعنی رقم ۳ از عدد ۲۳ را

در رقم سمت راست مضروب فیه، یعنی رقم ۴ از عدد ۱۴ ضرب می کنیم.
در محل جواب، رقم ۲ از عدد ۱۲ و ده بر یک را (به صورت یک نقطه)
می نویسیم:

$$\begin{array}{r} 0023^* \times 14^* \\ \hline 02 \end{array}$$

۳ ضرب در ۴ می شود ۱۲؛ ۲ را می نویسیم
و ده بر یک را کنارش ثبت می کنیم

مرحله دوم: برای یافتن رقم بعدی جواب، یعنی رقمی که باید زیر
رقم ۲ از عدد ۲۳ بیاید، دو عدد را (که حاصل ضربهای جزئی هستند
پیدا می کنیم و آنها را به یکدیگر می افزاییم. اولین آنها ۸ است که از
ضرب ۲ در ۴ حاصل می شود:

$$\begin{array}{r} 0023^* \times 14^* \\ \hline 02 \end{array}$$

دومین حاصل ضرب جزئی از ضرب رقمهای دیگر، یعنی ۳ و ۱ به دست
می آید:

$$\begin{array}{r} 0023^* \times 14^* \\ \hline 02 \end{array}$$

حالا دو حاصل ضرب جزئی را با هم جمع می کنیم: ۸ بعلاوه ۳ می شود
۱۱. این همان عددی است که می خواستیم. اما ده بر یک را هم باید
بیفزاییم، پس رقم بعدی جواب ۱۲ است؛ پس ۲ را می نویسیم و ده بر یک
هم داریم:

$$\begin{array}{r} 0023 \times 14 \\ \hline 0202 \end{array}$$

۲ در ۴ می شود ۸؛ ۳ در ۱ می شود ۳؛ ۸ بعلاوه ۳ می شود ۱۱؛
ده بر یک را هم می افزاییم

مرحله آخر: رقم سمت چپ مضروب، یعنی رقم ۲ از عدد ۲۳ را در
رقم سمت چپ مضروب فیه، یعنی رقم ۱ از ۱۴، ضرب می کنیم:

$$\begin{array}{r} ۰۰۲۳ \times ۱۲ \\ \hline ۳۰۲۰۲ \end{array}$$

۲ در ۱ می شود ۲ و با افزودن ده بر یک می شود ۳

در این مثال لازم نشد از صفر سمت چپ که جلوی مضروب نوشته ایم استفاده کنیم. اگر عدد ۱۰ یا بیشتر داشتیم، ده بر یک را در جای خالی زیر این صفر می نوشتیم. در این مثال، تنها یک ۳ داشتیم.

در اینجا مرحله دوم، تازگی داشت. برای به دست آوردن یک رقم از جواب، دو رقم را به کار بردیم. حاصل ضرب جزئی ۸ و حاصل ضرب جزئی ۳ را با هم جمع کردیم و از حاصل که ۱۱ بود در نوشتن جواب استفاده کردیم. اعداد ۸ و ۱۱ از ضرب کردن دو جفت رقم به دست آمد که آنها را «جفت بیرونی» و «جفت درونی» می نامیم.

$$\begin{array}{r} ۰۰۲۳ \times ۱۲ \\ \hline ۰۲ \end{array}$$

جفت بیرونی
جفت درونی

۱۲
↓ ↓
۳ + ۸
۱۱

۳ بعلاوه ۸ می شود ۱۱،
بعلاوه ده بر یک

دستور یافتن این جفتها چنین است: رقمی از مضروب که به آن رسیده ایم (یعنی، رقمی که درست بالای رقم بعدی جواب که باید یافته شود قرار دارد) بخشی از «جفت بیرونی» است که در مثال بالا عبارت است از رقم ۲ از عدد ۲۳. رقم دیگر از این «جفت بیرونی» رقم سمت راست مضروب فیه است که در طرف بیرون واقع شده است و در مثال بالا عبارت است از رقم ۴ در عدد ۱۴. جفت دیگر که «جفت درونی» متشکل از ۳ و ۱ است از دو رقمی تشکیل می شود که بلافاصله درون رقمهایی که هم اکنون به کار بردیم قرار دارند؛ رقم ۳ در عدد ۲۳ و رقم ۱ در عدد ۱۴.

«جفت بیرونی» و «جفت درونی» را زیاد به کار خواهیم برد، پس بد نیست در سه مثال زیر آنها را نشان دهیم:

$$۴۶ \times ۸۷$$

$$۷۲ \times ۳۴$$

$$۲۸ \times ۹۲$$

$$۴ \times ۷ \text{ جفت بیرونی } ۷ \times ۴ \text{ جفت بیرونی } ۲ \times ۲$$

$$۶ \times ۸ \text{ جفت درونی } ۲ \times ۳ \text{ جفت درونی } ۸ \times ۹$$

$$\overbrace{۴۶ \times ۸۷}$$

$$\overbrace{۷۲ \times ۳۴}$$

$$\overbrace{۲۸ \times ۹۲}$$

اکنون مثال ۳۸ ضرب در ۱۴ را در نظر بگیرید:

$$۰ \ ۰ \ ۳ \ ۸ \times ۱ \ ۴$$

مرحله اول: نخستین کار این است که ۸ را در ۴ ضرب می کنیم می شود ۳۲. رقم ۲ را می نویسیم و ۳ را (مثل ده بر یک) نقل می کنیم.

$$\begin{array}{r} ۰ \ ۰ \ ۳ \ ۸ \times ۱ \ ۴ \\ \hline \dots ۲ \end{array}$$

مرحله دوم: برای یافتن عدد بعدی باید از جفتهای بیرونی و درونی استفاده کنیم، رقمی از ۳۸ که اکنون به آن رسیده ایم ۳ است، زیرا ۳ درست بالای محلی است که رقم بعدی جواب را باید در آن نوشت. پس این ۳ بخشی از جفت بیرونی است. رقم دیگر جفت بیرونی چیست؟ یکی از رقمهای ۱۴ که مسلماً همان ۴ باید باشد، یعنی رقم بیرونی ۱۴. جفت درونی درست داخل این دو قرار دارد (یعنی رقمهای ۸ و ۱).

$$\begin{array}{r} ۰ \ ۰ \ ۳ \ ۸ \times ۱ \ ۴ \\ \hline \dots ۲ \end{array}$$

حالا ضرب می کنیم: ۳ در ۴ می شود ۱۲، و ۸ در ۱ می شود ۸. این دو حاصل ضرب جزئی را که ۱۲ و ۸ هستند با هم جمع می کنیم، حاصل ۲۰ می شود. رقم ۳ نقل شده را هم باید افزود، پس نتیجه ۲۳ می شود. رقم ۳ را می نویسیم و ۲ را (که همان بیست بر دو است) نقل می کنیم.

مرحله آخر: دو رقمی را که در سمت چپ واقع اند، یعنی رقم ۳ از عدد ۳۸ و رقم ۱ در عدد ۱۴ را در هم ضرب می کنیم. حاصل ۳ است. رقم ۲ی نقل شده، حاصل را به ۵ می رساند:

$$\begin{array}{r} 0038 \times 14 \\ \hline 050302 \end{array}$$

در زیر، دو مثال حل شده داریم که به صورت فشرده نشان داده شده اند. رقمهایی که زیرشان خط کشیده شده، از ستون قبل نقل شده اند. به عنوان تمرین سعی کنید خودتان معلوم کنید که رقمهای سطر «عمل» چگونه به دست آمده اند:

$$\begin{array}{r} 0032 \times 22 \\ \hline \text{جواب: } 704 \\ \text{عمل: } 662 \\ + \quad + \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0066 \times 32 \\ \hline \text{جواب: } 220004 \\ \text{عمل: } 18222 \\ + \quad + \\ \hline 218 \\ + \\ \hline 2 \end{array}$$

شاید مایل باشید که چند مثال از این نوع را خودتان حل کنید. در زیر چند عمل ضرب برای تمرین، داده شده که جواب آنها نیز در پایان آورده شده است:

$$۱. ۰ ۰ ۳ ۱ \times ۱ ۵$$

$$۲. ۰ ۰ ۱ ۷ \times ۲ ۲$$

$$۳. ۰ ۰ ۷ ۳ \times ۶ ۴$$

$$۴. ۰ ۰ ۳ ۲ \times ۲ ۱$$

$$۵. ۰ ۰ ۲ ۲ \times ۲ ۶$$

$$۶. ۰ ۰ ۴ ۸ \times ۵ ۲$$

جوابها:

$$۱. ۲۶۵$$

$$۳. ۴۶۷۲$$

$$۵. ۱۰۹۲$$

$$۲. ۲۰۸$$

$$۴. ۷۱۲$$

$$۶. ۲۴۹۶$$

اگر قدری در مورد کاری که اینجا صورت می گیرد تأمل کنید متوجه می شوید که این دستور روالی کاملاً طبیعی دارد. می خواهیم دو عدد دو رقمی را در یکدیگر ضرب کنیم. برای این منظور، دو رقم واقع در سمت راست را در هم ضرب می کنیم تا رقم سمت راست جواب پیدا شود - چنانکه در مورد ضرب ۲۳ در ۱۴، ابتدا ۳ را در ۴ ضرب کردیم. برای یافتن رقم سمت چپ جواب، دو رقم واقع در سمت چپ را در هم ضرب می کنیم، چنانکه برای ضرب ۲۳ در ۱۴، رقم ۲ را در ۱ ضرب کردیم. ضمناً، برای یافتن رقمهای میانی جواب، از جفتهای بیرونی و درونی استفاده کردیم. هر جفت متشکل از دو رقم است که در یکدیگر ضرب می شوند، پس از هر جفت یک عدد به دست می آید و از جمع کردن این دو عدد، بخشی از جواب حاصل می شود.

در ادامه مطلب نیز از این جفتهای بیرونی و درونی استفاده خواهیم کرد. در واقع، این جفتها بعداً خیلی بیشتر به کار گرفته خواهند شد. البته وقتی خودتان مسئله ای را حل می کنید لزومی ندارد جفتها را با کشیدن خطهای خمیده که به ارقام هر جفت می رسد مشخص کنید. در شروع بحث، این کار را فقط به خاطر تفهیم بهتر موضوع، انجام دادیم. در موقع کار، عملاً می توان جفت بیرونی را با توجه به این نکته مشخص کرد که این جفت شامل رقمی از مضروب است که درست بالای جای خالی بعدی، یعنی محلی که باید رقم بعدی جواب در آن نوشته شود، قرار

دارد. جفت درونی، چنانکه خطهای خمیده در نمودار نشان می دهند، متشکل از دو رقمی است که درست داخل دو رقم جفت بیرونی واقع اند.

مضروبهای طولانی

وقتی مضروب عددی طولانی باشد، کافی است مرحله دوم را، هر چند بار که برای آن عدد لازم است، تکرار کنیم. مثلاً فرض کنید می خواهیم ۳۱۲ را در ۱۴ ضرب کنیم. البته اینجا عدد طولانی ما به جای دو رقم تنها سه رقم دارد، اما همین برای نشان دادن موضوع کافی است:

مرحله اول: رقم سمت راست ۳۱۲ را در رقم سمت راست ۱۴ ضرب می کنیم:

$$\begin{array}{r} 00312 \times 14 \\ \hline 8 \end{array}$$

مرحله دوم: حالا از جفتهای بیرونی و درونی استفاده می کنیم. رقم بعدی که با آن کار داریم رقم ۱ در ۳۱۲ است. این رقمی است که درست بالای محلی قرار گرفته که رقم بعدی جواب در آن وارد خواهد شد. پس رقم ۱ در ۳۱۲ بخشی از جفت بیرونی است:

$$\begin{array}{r} 00312 \times 14 \\ \hline 68 \\ 2 \\ \hline 2 \end{array}$$

جواب :
عمل :

جفت بیرونی، ۶ ضرب در ۴ می شود ۲۴
جفت درونی، ۲ ضرب در ۱ می شود ۲
۴ بعلاوه ۲ می شود ۶

مرحله سوم: در اینجا همان مرحله دوم تکرار می شود، فقط جای جفتهها تغییر می کند. یعنی با جفتهای دیگری از اعداد سرو کار داریم. اما در اینجا نیز همچنان رقم بعدی از عدد ۳۱۲ که با آن کار داریم، رقمی

مرحله آخر:

$$\begin{array}{r} 00312 \times 14 \\ \hline 40368 \\ \hline \end{array}$$
 جواب :
 عمل :

$$\begin{array}{r} + \\ 3 \\ + \end{array}$$
 ده بر يك

جفت بیرونی، صفر ضرب در ۴، می شود صفر. جفت درونی، ۳ ضرب در ۱، می شود ۳. صفر بعلاوه ۳ می شود ۳. با افزودن ده بر یک، نتیجه می شود ۴، یعنی همان جوابی که قبلاً یافتیم - جواب باید هم همین در می آمد، زیرا جواب درست این است. از اینجا معلوم می شود که مرحله آخر را می توانیم با همان روش مراحل دوم و سوم انجام دهیم؛ یعنی می توانیم به جای استفاده از دستور خاصی برای مرحله آخر، این مرحله را هم به کمک جفتهای بیرونی و درونی انجام دهیم.

هر وقت ردیفی از اعداد را با عنوان «عمل» نشان می‌دهیم، منظور این است که در هنگام کار، این عمل باید در ذهن انجام شود. در موارد اخیر، تنها برای تشریح موضوع، عمل را بصراحت بیان کردیم. موقع حل هر مسئله، تنها دو عددی را که باید در هم ضرب شوند و نیز جواب مسئله را می‌نویسیم.

مسئله‌های اخیر نیز محل قرار گرفتن زوج بیرونی را نشان می‌دادند. این جفت را همیشه می‌توان بر این اساس تعیین کرد که شامل رقمی از مضروب است که درست بالای محل رقم بعدی جواب، که باید یافته شود، قرار گرفته است:

بخشی از جواب :

۰	۰	۵	۳	۲	۱	۰	۴	۰	۲	X	۶	۴			
											۶	۵	۷	۲	۸

سر دیگر خط خمیده به رقم سمت راست عدد دو رقمی می‌رسد، زیرا این رقم، رقم «بیرونی» است. سپس به جفت درونی می‌رسیم که متشکل است از دو رقمی که بلافاصله درون رقمهای جفت بیرونی واقع اند.

ضمن کار، احتمالاً متوجه خواهید شد که برای مشخص کردن محل رقمها در جفتهای بیرونی و درونی، یک راه مناسب این است که بخشهایی از اعداد را با انگشتان خود بپوشانید. این کار زحمت چندانی ندارد و از خطاهایی که ممکن است بر اثر گم کردن مقطعی محل عمل رخ دهد جلوگیری می‌کند. در مورد ضرب اعداد سه رقمی در دو رقمی، مثل 312×14 ، احتمال گم کردن محل، خیلی کم است، ولی بزودی به اعدادی خواهیم رسید که بسیار طولانی‌ترند. در هر حال، اکیداً توصیه می‌شود که رقمها را واضح و با فاصله از یکدیگر بنویسید، و هر رقم از جواب را درست زیر رقمی که به آن مربوط است، ثبت کنید. پاکیزه نوشتن کمک می‌کند تا به اشتباهات قابل احتراز دچار نشویم. این گفته نه فقط در آنچه اینجا انجام می‌شود، بلکه همچنین برای ضرب معمولی، هر نوع تقسیم، و برای جمع و تفریق نیز صادق است. جا دارد بکوشیم تا به پاکیزه نوشتن عادت کنیم.

حالا برای آنکه میزان درک خود را از این روش بیازمایید، مثالی می‌آوریم. در صفحه بعد، عمل ضرب 311×23 را ثبت کرده‌ایم. جواب زیر 311 نوشته شده و یک ردیف مربوط به عمل هم زیر جواب آمده است که باید در ذهن انجام شود. اکنون ردیفهای جواب و عمل را با یک برگ کاغذ بپوشانید، و رقم سمت راست جواب را به طور ذهنی محاسبه کنید. حالا کاغذ را قدری کنار بکشید تا اولین رقم جواب را ببینید و معلوم شود جوابتان درست بوده یا نه. سپس رقم بعدی جواب را در ذهن محاسبه کنید، سپس کاغذ را قدری دیگر کنار بکشید تا این رقم بعدی را هم ببینید تا درست یا غلط بودن جوابتان معلوم شود. اگر درست نبود، کاغذ را قدری جابه‌جا کنید تا ردیف «عمل» برای آن رقم دیده شود و در آنجا ببینید که آن رقم چگونه به دست آمده است. در ردیف

«عمل»، رقمهای واقع در زیر یکدیگر، باید با هم جمع شوند تا رقمی از جواب حاصل شود:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & \times & 2 & 3 \\
 \hline
 & 7 & 0 & 5 & 3 & & & \\
 \hline
 0 \times 3 & 3 \times 3 & 1 \times 3 & 1 \times 3 & & & & \\
 3 \times 2 & 1 \times 2 & 1 \times 2 & & & & &
 \end{array} \\
 \text{(ده بریک)}
 \end{array}$$

صفرهای جلوی مضروب

در مثالهایی که تاکنون داشتیم، دو صفر جلوی مضروب گذاشته می شد ولی دیدیم که فقط یکی از آنها مورد استفاده قرار می گرفت. اما گاه از هر دو صفر استفاده می شود. مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & \times & 3 & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 1 & 8 & 2 & & &
 \end{array} \\
 \text{جواب :} \\
 \text{عمل :} \quad \begin{array}{cccccc}
 0 \times 1 & 0 \times 1 & 5 \times 1 & 2 \times 1 & 2 \times 1 & & & \\
 + & + & + & + & & & & \\
 0 \times 3 & 5 \times 3 & 2 \times 3 & 2 \times 3 & & & & \\
 + & + & & & & & &
 \end{array} \\
 \text{ده بریک ده بریک}
 \end{array}$$

در این مثال زیر دومین صفر هم که در انتها الیه سمت چپ قرار گرفته، رقمی داریم. البته توجه کنید که این رقم همان ده بریک است. رقمهای عدد ۳۱ در اینجا نقشی ندارند، زیرا هر دو با ضرب شدن در صفر، صفر می شوند. تنها ده بریک باقی می ماند.

به این ترتیب روشن می شود که چرا در مثالهای قبلی به دومین صفر

نیازی نداشتیم. یک صفر در جلوی مضروب کافی بود، زیرا در آخرین مرحله، ده بر یک نداشتیم.

دستور کلی: وقتی عددی در مضروب فیه با هر طولی ضرب می شود، به تعداد رقمهای مضروب فیه، جلوی مضروب صفر می گذاریم.

گاه، چنانکه دیدیم، همه صفرها به کار نمی آیند ولی رعایت این دستورها هیچ گاه ضرری نخواهد داشت. اگر این شیوه را دنبال کنیم و برای آزمایش، وقتی فقط یک صفر لازم است، دو صفر بگذاریم، در آخرین مرحله می بینیم که زیر آخرین صفر رقمی نوشته نمی شود.

تاکنون تنها با مضروبهایی دو رقمی یا سه رقمی کار کرده ایم، ولی اعداد طولانی مثل ۲۴۱۳۵۴ هم با همین روش ضرب می شوند. در اینجا کافی است عمل ضرب دو جفت رقم و جمع کردن نتایج را تکرار کنیم. فرض کنید می خواهیم ۲۴۱۳۵۴ را در ۳۲ ضرب کنیم:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & \times & 3 & 2 \\
 \hline
 \text{جواب :} & & & & & & & & & 7 & 0 & 2 & 8 \\
 \text{عمل :} & & & & & & & & & 6 & 0 & & & \\
 & & & & & & & & & 0 & 12 & & & \\
 & & & & & & & & & \text{ده بر يك}
 \end{array}
 \end{array}$$

تا اینجا همانند مثالهای قبل، سه رقم از مضروب را به کار برده ایم. مرحله بعدی هم به همین صورت انجام می شود:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & \times & 3 & 2 \\
 & & & & & & & & & \text{-----} & & & & & & & & & & \\
 \text{جواب :} & & & & & & & & & 0 & 1 & 7 & 2 & 8 \\
 \text{عمل :} & & & & & & & & & 2 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & + & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 9 & & & & & & & & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

۲ حاصل ضرب ۱ در ۲ است؛
۹ حاصل ضرب ۳ در ۳ است

طبعاً، ۲ و ۹ را با هم جمع می‌کنیم، و این ۱۱، رقم بعدی جواب را می‌دهد. رقم ۱ را به عنوان رقمی از جواب می‌نویسیم و ده بر یک را کنار آن به صورت نقطه ثبت می‌کنیم. سپس یک مرتبه دیگر به سمت چپ می‌رویم. جفتهای بعدی را دو رقم ۴ و ۱ از مضروب و ۳ و ۲ از مضروب فیه مشخص می‌کنند که در اینجا ۴ ضرب در ۲، بعلاوه ۱ ضرب در ۳ خواهیم داشت. راه حل کامل به صورت زیر است:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & \times & 3 & 2 \\
 \hline
 \text{جواب :} & 7 & 0 & 7 & 0 & 2 & 0 & 1 & 7 & 0 & 2 & 8 \\
 \hline
 \text{عمل :} & 0 & 2 & 8 & 2 & 6 & 0 & 8 & & & & \\
 & 6 & 12 & 3 & 9 & 0 & 12 & & & & & \\
 & & & & (1) & (1) & (1) & & & & & (1)
 \end{array}
 \end{array}$$

صفر واقع در انتها الیه سمت چپ را به کار نبردیم. در این مثال هم، در آخرین مرحله ده بر یک نداریم و زیر آخرین صفر چیزی نوشته نمی‌شود. این صفر را فقط به خاطر کامل بودن کار آوردیم. طبق دستور، وقتی مضروب فیه دو رقم دارد باید دو صفر بگذاریم. اینجا یک صفر اضافی بود ولی یک صفر چه ارزشی دارد؟ هیچ!

حالا یک «مسئله فکری» کوچک داریم: جواب آن را باید بدون محاسبه مستقیم بدهید. اکنون که بر اساس یکی از مثالها می‌دانید ۳۱۱ ضرب در ۲۳ می‌شود ۷۱۵۳، حاصل ضرب ۳۱۱۰۰ در ۲۳ چقدر است؟ تنها تفاوت، وجود دو صفر در انتهای مضروب است. حالا جواب چیست؟ پیش از خواندن بند بعدی، پاسخ را بگویید.

جواب، همان طور که حتماً خودتان هم گفته‌اید، ۷۱۵۳۰۰ است. دو صفری که در آخر مضروب وجود داشت، در آخر جواب هم ظاهر شده است. این وضع همیشه صادق است. صفرهای موجود در آخر مضروب — هر چند تا که باشند و مضروب هر چه باشد — باید عیناً به آخر جواب منتقل شوند.

کدام یک از راههای ممکن زیر را برای معلوم کردن این موضوع در پیش گرفته‌اید؟ شاید هم آن قدر تیز هوش بوده‌اید که بیش از یک راه را به طور همزمان در نظر داشته‌اید. در هر حال، این چهار راه به قرار زیرند:

۱. تکیه به حدس. شاید این نام چندان مناسب نباشد، در این صورت هر معادلی می‌خواهید به جای آن بگذارید. کسانی که اهل ریاضیات نیستند، آن را «برداشت حسی» می‌نامند. ریاضیدانان از آن به عنوان «شهود ریاضی» یاد می‌کنند. به هر حال، آن را هر چه بنامیم، خیلی وقتها جواب غلط می‌دهد، اما در مواردی هم می‌توان به آن توسل جست.

۲. حافظه. شاید از دوران مدرسه یادتان مانده باشد که در این گونه موارد چه باید کرد. اگر این موضوع در حافظه با قدری ابهام همراه باشد، می‌توانیم بگوییم که نیمی از کار با حافظه و نیمی دیگر با «برداشت حسی» انجام شده است.

۳. ضرب کردن در صفر. می‌دانیم که صفر ضرب در هر عددی همان صفر را می‌دهد. مسلماً، وقتی کار را با ضرب کردن ۲۳ در دو صفری که آخر ۳۱۱۰۰ قرار دارند آغاز کنیم، مرتباً صفر به دست می‌آوریم تا وقتی که به رقم ۱ سمت راستی در عدد ۳۱۱۰۰ برسیم. از جمع دو صفر هم، همان صفر حاصل می‌شود. پس تا رسیدن به قسمت ۳۱۱ در عدد ۳۱۱۰۰، چیزی جز صفر نتیجه نمی‌شود، و پس از آن هم همان حاصل ۳۱۱ ضرب در ۲۳ به دست می‌آید.

۴. تغییر دادن ترتیب عاملها. این روشی است که اشخاص در گیر با ریاضیات ممکن است به کار گیرند. نکته اصلی در اینجا آن است که وقتی دو یا چند عدد را در یکدیگر ضرب می‌کنیم، نحوه دسته‌بندی کردن آنها تأثیری بر نتیجه ندارد، و همین قدر کافی است که نهایتاً همه عاملها در ضرب وارد شده باشند. مثلاً، ۲ ضرب در ۳ ضرب در ۴ را در نظر بگیرید. اگر کار را به ترتیب عادی انجام دهیم، می‌گوییم، ۲ ضرب در ۳ می‌شود ۶، سپس ۶ ضرب در ۴ می‌شود ۲۴، پس حاصل ۲۴ است.

اما در صورت تمایل می‌توانستیم کار را با ضرب کردن ۳ در ۴ شروع کنیم: ۲ ضرب در ۳ ضرب در ۴، برابر است با ۲ ضرب در ۱۲ که باز هم ۲۴ می‌شود. بعلاوه، می‌توانستیم ترتیب عاملها را هم عوض کنیم: ۲ ضرب در ۳ ضرب در ۴، برابر است با ۲ ضرب در ۴ ضرب در ۳، یا ۸ ضرب در ۳. باز هم نتیجه ۲۴ در می‌آید.

حالا همین نکته را برای ضرب ۳۱۱۰۰ در ۲۳ به کار می‌بریم. مضروب را به عنوان ۳۱۱ ضرب در ۱۰۰ ضرب در ۲۳، در نظر می‌گیریم. جای عددها را تغییر می‌دهیم: نتیجه کار با ۳۱۱ ضرب در ۲۳ ضرب در ۱۰۰، یکی است. پس معلوم می‌شود باید ۳۱۱ را در ۲۳ ضرب کنیم، که قبلاً در مثالی آورده شده، و با توجه به آن می‌دانیم که جوابش ۷۱۵۳ است. حالا باید این عدد را در ۱۰۰ هم ضرب کنیم. اما برای ضرب کردن هر عدد در ۱۰۰، کافی است دو صفر به آخر عدد اضافه کنیم. پس دو صفر در آخر ۷۱۵۳ می‌گذاریم و نتیجه چنانکه گفته شد ۷۱۵۳۰۰ خواهد بود.

برتری این روش چهارم در آن است که در برخی موارد دیگر هم راه کار را نشان می‌دهد. فرض کنید که این دو صفر در آخر ۲۳ قرار گرفته باشند. می‌خواهیم ۳۱۱ را در ۲۳۰۰ ضرب کنیم. همان استدلال بند ۴ نشان می‌دهد که باید این دو صفر را به آخر جواب ببریم. باز هم جواب ۷۱۵۳۰۰ می‌شود. در واقع، اگر یک صفر در آخر ۳۱۱ و صفر دیگر در آخر ۲۳ بود، یعنی می‌خواستیم ۳۱۱۰ را در ۲۳۰ ضرب کنیم، هر دو صفر به آخر جواب برده می‌شدند و باز همان عدد ۷۱۵۳۰۰ را داشتیم.

دستور: همه صفرهاى موجود در آخر مضروب و در آخر مضروب فیه را یکجا به آخر جواب بیفزایید. سپس عمل ضرب را بدون در نظر گرفتن این صفرها انجام دهید.

مثلاً، اولین مثال این فصل، چنین بود:

$$\begin{array}{r} 12 \times 23 \\ \hline 36 \\ 240 \\ \hline 276 \end{array}$$

حالا فرض کنید می‌خواهیم ۲۳۰۰۰۰ را در ۱۴۰ ضرب کنیم، جواب چه خواهد بود؟ کافی است مثال را مثل قبل، بدون توجه به صفرها حل کنیم، سپس پنج صفر انتهایی را یکجا به دنبال جواب بیفزاییم:

$$\begin{array}{r} 0023 \times 14 \\ \hline 32200000 \end{array}$$

جواب ۳۲۲۰۰۰۰۰ است.

ضرب کردن در عدددهای سه رقمی

تاکنون اعداد گوناگون را در مضروب فیه‌هایی ضرب کرده‌ایم که تنها دو رقم داشتند. مضروب می‌توانست به هر طولی باشد، مثل ۲۴۱۳۰۴ که در یک مثال داشتیم، ولی عددی که در آن ضرب می‌شد دو رقم داشت که در آن مثال ۳۲ بود. عددهای مختلف را چگونه در یک مضروب فیه سه رقمی ضرب کنیم؟

بد نیست مثالی بیاوریم: ۲۱۳ ضرب در ۱۲۱. مضروب فیه سه رقم دارد، پس سه صفر جلوی مضروب می‌گذاریم:

$$000213 \times 121$$

این کار مطابقت دارد با دستوری که قبلاً گفتیم در مورد اینکه به تعداد رقمهای مضروب فیه، جلوی عدد سمت چپ یعنی مضروب صفر می‌گذاریم (گاه چنانکه دیدیم، یکی از این صفرها اضافی در می‌آید). سپس کار را مرحله به مرحله پیش می‌بریم و در هر مرحله یک رقم از جواب به دست می‌آوریم:

مرحله اول:

$$\begin{array}{r} 000213 \times 121 \\ \hline 3 \end{array}$$

۳ ضرب در ۱ می‌شود ۳

جواب:

مرحله دوم:

$$\begin{array}{r} 000213 \\ \times 121 \\ \hline \end{array}$$

جواب: 73

عمل: 1×1

$$+$$

$$3 \times 2$$

(رقمهایی که زیرشان یک خط کشیده

شده در یکدیگر ضرب می‌شوند؛

رقمهایی هم که زیرشان دو خط کشیده

نیز همین طور).

تا اینجا، در این دو مرحله اولیه، صرفاً همان کارهایی را کردیم که در بخش قبل می‌کردیم. محاسبه تا این مرحله عیناً مانند وقتی است که به جای 213 در 121 بخواهیم 13 را در 21 ضرب کنیم.

مرحله سوم: این کار تازه‌ای است: برای یافتن رقم بعدی، به جای دو جفت رقم، این بار حاصل ضربهای سه جفت رقم را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 000213 \\ \times 121 \\ \hline \hline \hline \end{array}$$

جواب: 773

عمل: 2×1

$$+$$

$$1 \times 2$$

$$+$$

$$3 \times 1$$

نحوه انجام «عمل» تابع چگونگی ثبت اعداد است. برای روشن‌تر شدن موضوع می‌توانیم کمانکهای نشان‌دهنده جفتهای «بیرونی» و «درونی» را مثل گذشته رسم کنیم، ولی حالا علاوه بر اینها یک جفت «میانی» هم داریم:

$$\begin{array}{r} \overbrace{213}^{} \times \overbrace{121}^{} \\ \hline \hline \hline \end{array}$$

بیرونیترین خط بین رقم ۲ از ۲۱۳ و رقم ۱ از ۱۲۱ کشیده شده است. بنابراین به ازای جفت بیرونی در جواب، حاصل ضرب ۲ در ۱ را داریم. قدری به داخل می‌رویم. خط میانی، رقم ۱ از ۲۱۳ را به ۲ از ۱۲۱ وصل می‌کند و به ازای آن ۱ ضرب در ۲ را داریم. این دومین جزء جواب است. سومین و آخرین جزء جواب از درونی‌ترین خط به دست می‌آید که به ازای آن ۳ ضرب در ۱ را داریم. با جمع کردن این سه جزء، داریم ۲، بعلاوه ۲، بعلاوه ۳، که می‌شود ۷ و رقم بعدی جواب است. بیرونیترین جفت، که ۲ و ۱ است، با همان دستور قبلی مشخص می‌شود: رقمی از مضروب که درست بالای محل نوشتن رقم بعدی جواب که باید یافته شود، قرار دارد، بخشی از جفت بیرونی است. رقم دیگر این جفت، آخرین رقم ۱۲۱ است. رقمهای بعد از اینها، جفت میانی را تشکیل می‌دهند و رقمهای باقیمانده هم طبعاً جفت درونی هستند.

بقیه کار، تکرار همین مرحله است با سه خط خمیده که قدری به طرف چپ کشیده شده‌اند:

مرحله چهارم:



عمل: 0×1

+

2×2

+

1×1

رقم ۵ جواب حاصل جمع صفر و ۴، ۱ است

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & \times & 1 & 1 & 2 \\ & & & & & \underline{\underline{2}} & & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{2}} \\ & & & 2 & 8 & & & & & \end{array}$$

صفر بعلاوه ۲ می شود ۲

مرحله سوم:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & \times & 1 & 1 & 2 \\ & & & \underline{\underline{3}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{2}} & & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{2}} \\ & & & 04 & 2 & 8 & & & & \end{array}$$

۱۲ بعلاوه صفر بعلاوه ۲ می شود ۱۴

مرحله چهارم:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & \times & 1 & 1 & 2 \\ & & & \underline{\underline{3}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{2}} & & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{2}} \\ & & & 4 & 04 & 2 & 8 & & & \end{array}$$

صفر بعلاوه ۳ بعلاوه صفر بعلاوه ده بر یک می شود ۴

مرحله آخر:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & \times & 1 & 1 & 2 \\ & & & \underline{\underline{3}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{2}} & & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{2}} \\ & & & 3 & 4 & 04 & 2 & 8 & & \end{array}$$

صفر بعلاوه صفر بعلاوه ۳ می شود ۳

این آخرین مرحله است زیرا ده بر یک (که به صورت نقطه نوشته می شود) نداریم. اگر ده بر یک داشتیم زیر صفر سمت چپ رقم ۱ را می نوشتیم. اگر دو نقطه (به نشانه بیست بر دو) داشتیم، زیر صفر واقع در منتهی الیه سمت چپ، یک رقم ۲ می نوشتیم. ولی در این مثال، محاسبه عملاً تمام شده و جواب همان ۳۴۴۲۸ است.

یادتان باشد که حاصل ضرب صفر در هر عددی، صفر است.

سرانجام با حل یک تمرین می توانید خودتان ببینید که عملاً کار با این روش چقدر آسان است:

• • • ۲ • ۳ × ۲ ۲ ۱

مسئله اول رقم ۳ از ۲۵۳ را در رقم ۱ از ۲۲۱ ضرب می کنید. سپس ۵۳ را در ۲۱ از ۲۲۱، با توجه به جفتهای بیرونی و درونی ضرب و نتایج را جمع می کنید؛ و کار دنبال می شود. جواب، همان طور که احتمالاً یافته اید ۴۴۸۶۳ است.

در صورت تمایل می توانید خودتان مثالهایی مطرح کنید و به حل آنها بپردازید. برای سهولت می توانید ابتدا با مضروب فیه های دو رقمی، مثل ۲۳ یا ۳۱ عمل کنید و سپس مضروب فیه های سه رقمی را به کار ببرید. این روش را می توانید برای اعدادی با طول دلخواه نیز به کار ببرید اما وقتی عددی طولانی شامل رقمهای بزرگ متعددی باشد، مثل ۹۸۶۹، هنگام استفاده از روش این فصل ناگزیر خواهید بود که (به جای نقل کردن ۱ و ۲ در ده بر یک و بیست بر دو) اعداد نسبتاً بزرگی را به مرتبه بعدی نقل کنید. به همین علت در مثالهایی که تا به حال آوردیم از رقمهای کوچکتر، مثل ۲ و ۳ بیشتر استفاده کردیم. اگر حل یکی دو مسئله با رقمهای بزرگ را امتحان کنید، ارزش «ضرب سریع» فصل بعد را که در آن فقط ده بر یک و بیست بر دو وارد کار می شود، بهتر درک خواهید کرد. در عین حال، روش این فصل برای اعدادی با رقمهای کوچک بسیار مناسب است و گذشته از آن، بخشی ضروری از فصل بعد به شمار می آید.

ضرب کردن در عددهای به طول دلخواه

برای مضروب فیه های طولانیتر هم از همین اصول استفاده می کنیم. در مورد مضروب فیه های چهار رقمی، مثل ۳۲۱۴ به این طریق عمل می شود: هر رقم از جواب، مجموع چهار جزء است. هر یک از این اجزا از ضرب دو رقم در یکدیگر به دست می آید. این جفت رقمها کدام اند؟ رقمهای

واقع در انتهای یک کمانک؛ یا به عبارت دیگر، جفتهای بیرونی و درونی. مثال ۲۱۵۳ ضرب در ۳۲۱۴ را در نظر بگیرید:



در این شکل، چهار جفتی که در یکی از مراحل میانی محاسبه به کار می روند مشخص شده است. در این مرحله می گوئیم: «۲ ضرب در ۴ می شود ۸، بعلاوه ۱ ضرب در ۱ می شود ۹، بعلاوه صفر می شود ۹، بعلاوه ۹ می شود ۱۸». در جلوی مضروب چهار صفر داریم زیرا ۳۲۱۴ شامل چهار رقم است. صفر واقع در منتهی الیه سمت چپ به کار نمی آید مگر آنکه در آخرین مرحله ده بر یک (یا بیست بر دو ...) داشته باشیم؛ در اینجا هم همین حالت برقرار است. نحوه انجام عمل ضرب به صورت زیر است:

مرحله اول:

$$\begin{array}{r} 00002153 \times 3214 \\ \hline 2 \end{array}$$

سه ۴ تا می شود ۱۲

مرحله دوم:

$$\begin{array}{r} 00002153 \times 3214 \\ \hline 202 \end{array}$$

صفر بعلاوه ۳ بعلاوه ده بر یک

مرحله سوم:

$$\begin{array}{r} 00002153 \times 3214 \\ \hline 00202 \end{array}$$

۴ بعلاوه صفر بعلاوه ۶

مرحله چهارم:

$$\begin{array}{r} 00002153 \times 3214 \\ \hline 0900202 \end{array}$$

۸ بعلاوه ۱ بعلاوه صفر بعلاوه ۹ بعلاوه ده بر یک

مرحله پنجم:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & 2 & 1 & \circ & 3 & \times & 3 & 2 & 1 & 2 \\ \hline & & & & 2 & 1 & & & & 3 & 2 & 1 & 2 \\ \hline & & & & 2 & 1 & & & & 3 & 2 & 1 & 2 \\ \hline & & & & 2 & 1 & & & & 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

صفر بعلاوه ۲ بعلاوه ۲ بعلاوه صفر بعلاوه ده بر یک ۲۰۲ ۵۰۹۰۰

مرحله ششم:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & 2 & 1 & \circ & 3 & \times & 3 & 2 & 1 & 2 \\ \hline & & & & 2 & 1 & & & & 3 & 2 & 1 & 2 \\ \hline & & & & 2 & 1 & & & & 3 & 2 & 1 & 2 \\ \hline & & & & 2 & 1 & & & & 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

صفر بعلاوه صفر بعلاوه ۴ بعلاوه ۳ ۲۰۲ ۵۰۹۰۰ ۷

مرحله هفتم:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & 2 & 1 & \circ & 3 & \times & 3 & 2 & 1 & 2 \\ \hline & & & & 2 & 1 & & & & 3 & 2 & 1 & 2 \\ \hline & & & & 2 & 1 & & & & 3 & 2 & 1 & 2 \\ \hline & & & & 2 & 1 & & & & 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

صفر بعلاوه صفر بعلاوه صفر بعلاوه ۶ ۲۰۲ ۵۰۹۰۰ ۶ ۷

در مرحله اخیر ده بر یک (یا بیست بر دو ...) نداشتیم و حاصل جفت رقمها همه صفر می شود، پس کار تمام است. جواب ۲۷۵۹۰۵۴۲ است. در مورد مضروب فیه های طولانیتر نیز به همین شیوه عمل می شود.

چکیده مطالب

در این فصل ابتدا در مورد ضرب اعداد دو رقمی در دو رقمی، مثل ۳۱ در ۲۳ صحبت کردیم؛ سپس ضرب کردن عددهای طولانیتر در اعداد دو رقمی، مثل ۳۲۴۵۵ در ۴۲ را بیان کردیم؛ و پس از آن به مواردی پرداختیم که مضروب و مضروب فیه هر دو اعدادی به طول دلخواه باشند مثل ۳۲۴۵۰۵ ضرب در ۴۲۲. در همه این حالات، رقم سمت راست جواب را از ضرب کردن رقمهای سمت راست دو عدد مورد نظر به دست می آوریم. در همه موارد، رقمهای میانی جواب را با استفاده از جفتهای بیرونی و درونی و جمع کردن نتایج به دست می آوریم. سرانجام، برای یافتن رقمهای سمت چپ جواب صفراهایی جلوی مضروب می گذاریم و روش

استفاده از جفتهای بیرونی و درونی را در مورد این صفرها اعمال می کنیم؛ برای این کار به تعداد رقمهای مضروب فیه، صفر می گذاریم. در صورت تمایل، برای خود آزمایی و فراگیری بهتر این روش، می توانید تمرینهای زیر را انجام دهید:

$$۱. ۳۱ \times ۲۳$$

$$۶. ۷۰۵ \times ۲۵$$

$$۲. ۳۳ \times ۴۱$$

$$۷. ۵۱۱ \times ۶۱$$

$$۳. ۶۳ \times ۵۲$$

$$۸. ۳۴۱ \times ۶۳$$

$$۴. ۴۱۳ \times ۲۴$$

$$۹. ۴۱۳۳ \times ۲۱۲$$

$$۵. ۲۲۴ \times ۳۲$$

$$۱۰. ۳۱۵۲۲ \times ۳۱۳۱$$

جوابها:

$$۱. ۷۱۳ \quad ۲. ۱۳۵۳ \quad ۳. ۳۲۷۶ \quad ۴. ۹۹۱۲ \quad ۵. ۷۱۶۸$$

$$۶. ۱۷۶۲۵ \quad ۷. ۳۱۱۷۱ \quad ۸. ۲۱۴۸۳ \quad ۹. ۸۷۶۱۹۶$$

$$۱۰. ۹۸۶۹۵۳۸۲$$

امتحان کردن جواب

روش زیر برای امتحان کردن جواب را پروفیسور تراختنبرگ ابداع نکرده است ولی این قاعده به علت سادگی و سهولتش وارد مجموعه روشهای او شده است. ریاضیدانان از صدها سال پیش با این روش آشنا بوده اند ولی مردم عادی اطلاع زیادی از آن نداشتند و ظاهراً در موارد روزمره استفاده چندانی از آن نمی شده است. از این رو روش مذکور را تحت عنوان «روش مجموع ارقام»^۱ شرح می دهیم. اساس این روش چنانکه خواهیم دید، جمع زدن رقمهای هر عدد است.

هر یک از عددهای تک پیکری ۱ تا ۹ یک رقم خوانده می شوند. صفر هم یک رقم است. پس هر عدد کلاً از تعدادی رقم تشکیل می شود.

۱. digit - sum method در ریاضیات این روش را «طرح نه نه» نامیده اند - م.

«مجموع ارقام» حاصل جمع رقمهای موجود در هر عدد است، مثلاً:

$$۳ \quad ۱ \quad ۴ : \text{عدد}$$

$$۳ + ۱ + ۴ = ۸ : \text{مجموع ارقام}$$

اما از این پس همیشه مجموع ارقام را عددی یک رقمی در نظر می گیریم و برای این منظور هر وقت لازم باشد مجدداً رقمها را جمع می کنیم. مثلاً فرض کنید عدد ۶۳۲۴ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$۴ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۶ : \text{عدد}$$

$$۴ + ۲ + ۳ + ۶ = ۱۵ : \text{مجموع ارقام}$$

$$۱ + ۵ = ۶ : \text{از ۱۵ نتیجه می شود}$$

پس مجموع ارقام ۶۳۲۴ همان ۶ است. به عبارت دیگر در اینجا با مجموع ارقام تقلیل یافته سروکار داریم. با این کار، مرحله بعدی آسانتر انجام خواهد شد.

برای امتحان عمل ضرب باید سه مجموع ارقام را پیدا کنیم: مجموع ارقام مضروب، مجموع ارقام مضروب فیه، و مجموع ارقام حاصل ضرب. مثلاً فرض کنید ضرب زیر را انجام داده ایم و می خواهیم آن را امتحان کنیم:

$$\begin{array}{r} ۱ \quad ۳ \quad ۴ \quad \times \quad ۴ \quad ۰ \quad ۲ \quad ۰ \quad ۰ \\ \hline ۴ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۶ \end{array}$$

اینجا سه عدد داریم، دو عددی که در هم ضرب می شوند و جواب. مجموع ارقام هر یک را پیدا می کنیم:

مجموع ارقام	عدد
۶	مضروب : ۴ ۰ ۲
۴	مضروب فیه : ۳ ۱
۶	حاصل ضرب : ۴ ۲ ۳ ۶

زیرا ۱۵ تبدیل می شود به ۱
بعلاوه ۵ یعنی ۶

دستور امتحان عمل چنین است:

مجموع ارقام حاصل ضرب باید مساوی باشد با مجموع ارقام حاصل ضرب دو مجموع ارقام مضروب و مضروب فیه.

اگر این دو مساوی نباشند، غلطی در کار است. در مثال بالا، مجموع ارقام حاصل ضرب، ۶۳۲۴، برابر با ۶ است. این عدد باید مساوی باشد با مجموع ارقام حاصل ضرب دو مجموع ارقام دیگر. آیا چنین است؟ باید ضرب کرد تا معلوم شود: ۶ ضرب در ۴ می شود ۲۴، که به ۶ تبدیل می شود. دوباره نتیجه ۶ شده، پس نتیجه امتحان مثبت است. ضرب کردن این دو مجموع ارقام همیشه خیلی آسان است زیرا این اعداد یک رقمی اند. در واقع دو رقم که متناظر با دو عدد اولیه هستند در هم ضرب می شوند:

$$۶ \ ۳ \ ۲ \ ۴ = ۱ \ ۳ \ ۰ \ ۲ : \text{عددها}$$

$$۶ = (۲ + ۴) \text{ یعنی } ۲۴ = ۴ \times ۶ : \text{مجموع ارقام}$$

راههایی وجود دارد برای اینکه یافتن مجموع ارقام موجود در هر عدد ساده تر شود. این موضوع بویژه در یافتن مجموع ارقام عددهای خیلی بزرگ اهمیت خاصی پیدا می کند. این راهها برای صرفه جویی در وقت به قرار زیرند:

۱. ضمن کار، نتیجه را یک رقمی کنید و این کار را به آخر موکول نکنید. فرض کنید می خواهیم مجموع ارقام ۲۵۲۳۱۱ را پیدا کنیم. از سمت چپ آغاز و رقمها را پی در پی جمع می کنیم: ۲ بعلاوه ۵ بعلاوه ۲ تا آخر. نزد خود فقط مجموعهها را بگویید که مرتباً زیاد می شوند: ۲، ۷، ۹، ۱۲، و اکنون «ضمن کار، نتیجه را یک رقمی کنید». این ۱۲ تبدیل به ۳ (یعنی ۱ بعلاوه ۲) می شود. با این ۳ ادامه دهید و دو رقم باقیمانده در مثال بالا را با آن جمع کنید: ۳، ۴، ۵. مجموع ارقام ۵ است. این کار راحت تر است از محاسبه ۲ بعلاوه ۵ بعلاوه ۲ بعلاوه ۳ بعلاوه ۱ بعلاوه ۱ که می شود ۱۴، سپس ۱ بعلاوه ۴ که می شود ۵. در

عددهای خیلی طولانی به این طریق صرفه جویی زیادی در وقت می شود. مثلاً مجموع ارقام ۶۸۸۹۵۶۷ برابر با ۴ است. با یک رقمی کردن ضمن کار، نزد خود می گوئیم: «۶، ۱۴، می شود ۵، ۱۳، می شود ۴، ۱۳، می شود ۴، ۱۵، می شود ۶، ۱۳، می شود ۰۴» در غیر این صورت، مجبور خواهیم بود همه ارقام را تا رسیدن به مجموع ۴۹ با یکدیگر جمع کنیم.

۲. رقمهای ۹ را نادیده بگیرید. اگر عددی که رقمهایش را جمع می کنید شامل یک یا چند ۹ است، توجهی به آنها نکنید و آنها را در هنگام جمع کنار بگذارید. نتیجه کار با وقتی که آنها را هم در جمع وارد کرده باشید فرقی ندارد. شاید این موضوع قدری عجیب جلوه کند، ولی همیشه درست است. مجموع ارقام ۹۳۹۹ برابر با ۳ است؛ در اینجا ۹ها را نادیده می گیریم. اگر آنها را هم در جمع به حساب بیاوریم، مجموع ۳۵ می شود، سپس آن را تقلیل می دهیم: ۳ بعلاوه صفر می شود ۳. بعلاوه، اگر به دو رقم بر خوردید که مجموعشان ۹ است، می توانید هر دوی آنها را نادیده بگیرید: مجموع ارقام ۸۱۹۹۴ برابر با ۴ است، زیرا ۸ بعلاوه ۱ می شود ۹، و ۹ها هم به حساب نمی آیند. البته برای اطمینان بهتر است فقط وقتی این کار را بکنیم که دو رقمی که مجموعشان ۹ است کنار یکدیگر، یا اقلاً نزدیک به هم باشند. در غیر این صورت ممکن است فراموش کنید که می خواهید آنها را کنار بگذارید و یکی از آنها را در جمع وارد کنید.

این روش امتحان کردن در فصل بعد به کار گرفته می شود. افزون بر این، در هر تمرین دیگری که خودتان برای روش این فصل طرح می کنید، می توان از آن استفاده کرد. در محاسبات دیگری غیر از ضرب نیز، این روش کارایی دارد.

فصل سوم

ضرب سریع - روش «دو انگشتی»

چنانکه در فصل پیش دیدیم، امتیاز مهم روش تراختبرگ آن است که به کمک آن می‌توانیم هر عددی را در هر عدد دیگر ضرب کنیم و جواب را مستقیماً بنویسیم. در اینجا بر خلاف روش معمولی ضرب اعداد، هیچ رقمی به عنوان مرحله واسطه نوشته نمی‌شود. روش مستقیم که در فصل قبل تشریح شد کاربرد عام دارد، یعنی از آن می‌توانیم برای ضرب هر دو عدد دلخواهی استفاده کنیم. اما در بسیاری موارد، لازم است اصلاحاتی در آن انجام بگیرد، که در این فصل به این موضوع می‌پردازیم. وقتی اعدادی داریم که عمدتاً از رقمهای بزرگتر تشکیل شده‌اند، مثل ۹۷۸ ضرب در ۶۴۷، احتمالاً باید اعداد بزرگی را به طور ذهنی جمع کنیم و اعداد بزرگی را به مرتبه‌های بعدی نقل دهیم. اصلاحی که در این روش انجام می‌شود عبارت است از حذف این اعداد بزرگ که انجام اعمال ذهنی با آنها راحت نیست. برای منظور شیوه جدیدی را در این روش به کار می‌گیریم که پروفیسور تراختبرگ آن را روش «دو انگشتی» نامیده است. نام «یکان و دهگان» را نیز می‌توانیم برای آن به کار ببریم. ضمن تشریح این روش به علت این نامگذاریها که بیان‌کننده شیوه کار هستند، پی خواهید برد.

بهرتر است اول ببینیم خود این شیوه چیست، سپس از آن در انجام عملهای ضرب کامل استفاده کنیم. پس فعلاً موضوع عمل ضرب را که در این فصل با آن سرو کار داریم کنار می گذاریم و توجه خود را روی نکات زیر متمرکز می کنیم:

۱. هر رقم یک عدد تک پیکری است مثل ۵ یا ۷. صفر هم یک رقم است.

۲. وقتی رقمی را در رقم دیگر ضرب می کنیم، عددی یک رقمی یا دو رقمی، نه طولانیتر، به دست می آید. اثبات: بزرگترین عدد حاصل از ضرب کردن دو رقم، ۹ ضرب در ۹، یا ۸۱ است که فقط دو رقم دارد.

۳. گاه حاصل ضرب دو رقم در یکدیگر، عددی یک رقمی در می آید، مثل ۲ ضرب در ۳. در این موارد، این حاصل ۶، یا هر عددی که هست، در این روش با گذاشتن صفری جلوی آن، عددی دو رقمی به شمار می آید. در واقع در این روش مثلاً می گوئیم و می نویسیم ۲ ضرب در ۳ می شود ۰۶. حسن این کار ساده شدن دستورها و نحوه عمل، از طریق یکدست شدن همه حاصل ضربهای ارقام، به صورت عددهایی دو رقمی است. گذاشتن صفری جلوی یک عدد، مثلاً در ۰۶، طبعاً هیچ اثری روی ارزش واقعی آن عدد ندارد.

۴. در هر عدد دو رقمی، رقم سمت چپ، رقم «دهگان» و رقم سمت راست رقم «یکان» است. مثلاً در عدد ۳۷، رقم دهگان ۳ و رقم یکان ۷ است. این موضوع با کاربردهای روزمره وفق می دهد، زیرا ۳۷ تومان معادل ۳ ده تومانی و ۷ یک تومانی است.

۵. در استفاده از این روش جدید، خیلی وقتها تنها از رقم یکان اعداد استفاده می کنیم. مثلاً با رسیدن به ۲۴ فقط می گوئیم «۴» و از ۲ که رقم دهگان است چشم پوشی می کنیم. به نظر می رسد که با کنار گذاشتن یک رقم و نادیده گرفتن آن باید خطایی در محاسبه وارد شود. اما اشکالی پیش نمی آید، زیرا رقم دهگان نادیده گرفته شده به نوبه خود در جای دیگری وارد کار می شود. موارد دیگری هم هست که در آنها

فقط از رقم دهگان استفاده می کنیم و رقم یکان را نادیده می گیریم. در چنین موردی با نگاه کردن به ۲۴ می گوئیم «۲».

۶. نکته مهم. در این روش جدید، خیلی وقتها ناگزیر می شویم موضوع نکته ۲ را با موضوع نکته ۵ ترکیب کنیم. به عبارت دیگر، هنگام ضرب کردن دو رقم در یکدیگر (مثل ۳ ضرب در ۸) تنها رقم یکان حاصل (رقم ۴ از ۲۴ که حاصل ۳ ضرب در ۸ است) یا در موارد دیگری، فقط رقم دهگان را، به کار می بریم. مثلاً ممکن است داشته باشیم ۵ ضرب در ۷ و فقط ۳ را که رقم دهگان ۳۵ است به کار ببریم.

این یک عمل ذهنی نامتعارف است. در عمل ضرب معمولی چنین چیزی نداریم. و نخستین دفعاتی که این کار را می کنیم برایمان قدری عجیب جلوه می کند. حالا به عنوان تمرین به مثالهای زیر نگاه کنید و نزد خود تنها رقم یکان حاصل ضرب را بگوئید:

$$(۱) ۲ \times ۳ \quad (۲) ۳ \times ۶ \quad (۳) ۵ \times ۲ \quad (۴) ۸ \times ۲$$

جوابها ۲، ۸، ۵، ۶ است. اکنون دوباره به همین مثالها برگردید و این بار رقم دهگان هر حاصل ضرب را نزد خود بگوئید. جوابها بی شک ۱، ۱، ۲ و ۱ است.

۷. اینجا است که پای «یکان و دهگان» عملاً به میان می آید. دو رقم را کنار هم می گذاریم، مثلاً ۳ و ۸ را. هر یک از آنها را در یک رقم دیگر، مثلاً در ۴ ضرب می کنیم و همان طور که در بند ۵ گفته شد فقط رقم یکان یا رقم دهگان را اختیار می کنیم. اما این کار را به طریق خاصی انجام می دهیم. رقم یکان را فقط موقع ضرب کردن رقم سمت چپ (یعنی ۳) و رقم دهگان را فقط هنگام ضرب کردن رقم سمت راست (یعنی ۸) به کار می بریم. در این کار، حرف ی نشانه به کارگیری رقم یکان و حرف د نشانه استفاده از رقم دهگان حاصل است. نتیجه عمل، که در آن اعداد کنار گذاشته شده را داخل پرانتز آورده ایم، چنین است:

$$\begin{array}{r} \text{د ی} \\ ۳۸ \times ۲ \\ \hline (۱)۲ \quad ۳(۲) \end{array}$$

از این پس، همیشه ی و د را با همین ترتیب خواهیم داشت. برای رقم سمت چپ جفت ارقامی که کنار هم هستند، مثل ۳ در ۳۸، فقط رقم یکان حاصل ضرب را اختیار می کنیم. در مورد رقم سمت راست این جفت ارقام، یعنی رقم ۸ در ۳۸، تنها از رقم دهگان حاصل ضرب استفاده می کنیم.

۸. سرانجام، یک کار دیگر هم باقی مانده است: دو رقمی را که در بند ۷ پیدا کردیم، با هم جمع می کنیم. در این مثال ۲ و ۳ را به دست آوردیم. حالا آنها را جمع می کنیم، می شود ۵. این نتیجه ای است که موقع ضرب عملاً به کار گرفته می شود.

توجه کنید که از جفت ارقام ۳۸ تنها یک رقم ۵ را به دست آوردیم. اینجا ۳۸ را در ۴ «ضرب» کردیم ولی این همان عمل ضرب معمولی نبود. این یکی از ویژگیهای روش «یکان و دهگان» است: یک جفت رقم در رقم سومی ضرب می شود و حاصل کار تنها یک رقم است، مثل رقم ۵ در مثال بالا. علت این امر آن است که ما تنها رقم یکان یکی از نتیجه ها را گرفتیم و دهگان آن را نادیده گرفتیم و در مورد نتیجه دیگر هم عکس این کار را کردیم.

چون این کار بخش اصلی «روش دو انگشتی» است، جزئیات آن را به طور کامل بیان می کنیم. بار دیگر ۳۸ ضرب در ۴ را پیدا می کنیم (البته در اینجا «ضرب» به معنای معمولی نیست!)، و جزئیات عمل را در نمودار زیر نشان می دهیم:

$$\begin{array}{r} \text{د ی} \\ ۳۸ \times ۴ \\ \hline \text{مسئله:} \\ \text{عمل:} \quad ۱۲ \quad ۳۲ \\ \hline ۲+۳ \\ \hline ۵ \end{array}$$

بی درنگ باید این نکته را هم بیفزاییم که بعد از آشنا شدن با این روش لزومی ندارد همه این کارها را به طور کامل انجام دهیم. در واقع، تنها چیزی که می نویسیم، اعدادی است که می خواهیم با آنها کار کنیم، یعنی ۳۸ و ۴، و نتیجه نهایی یعنی ۵. از این گذشته: پس از یاد گرفتن روش باید سعی کنیم در مورد اعدادی که برای توضیح عمل در نمودار بالا می بینید، حتی فکر هم نکنیم. این کار ذهنی باید به طور نیمه خود کار و عمدتاً در زیر لایه کاملاً آگاهانه، انجام بگیرد. به ۳۸ و ۴ نگاه می کنیم و به طور نیمه آگاهانه به ۲ و ۳ می رسیم (در ۱۲ و ۳۲) و تقریباً بی-درنگ نزد خود می گوئیم «۵». در اینجا هم مثل هر کار دیگری، تمرین کافی موجب آسان شدن کار می شود.

برای تأکید بر اهمیت این کار، نتیجه آن را با اصطلاح خاص «حاصل ضرب جفتی» می نامیم. در مثال بالا عدد ۵ به دست آمده، حاصل ضرب جفتی 4×38 است.

تعریف. حاصل ضرب جفتی، عددی است که از ضرب کردن یک جفت رقم در یک رقم دیگر (مضروب فیه) به طریقی خاص به دست می آید: هر یک از دو رقم را جداگانه در رقم مضروب فیه ضرب می کنیم، آن گاه رقم یکان حاصل ضرب رقم سمت چپ جفت و رقم دهگان حاصل ضرب رقم سمت راست جفت را با هم جمع می کنیم.

عددی که از این راه به دست می آید و حاصل ضرب جفتی خوانده می شود برای ما کاربرد دارد زیرا به کمک آن می توانیم عمل ضرب سریع را بدون نقل عددهای بزرگ به مرتبه بالاتر، یا حتی بدون درگیر شدن با عددهای بزرگ انجام دهیم. بزرودی خواهیم دید که این کار چگونه صورت می گیرد. ابتدا به ذکر مثالهایی می پردازیم که چند نکته ریز در آن قابل توجه است:

۵ ی

۵ × ۲ ۸

جواب، چنانکه احتمالاً خود نیز یافته‌اید، ۱ است؛ اگر شما به عدد دیگری رسیده‌اید، طرز یافتن آن را در زیر ببینید:

$$\begin{array}{r}
 \text{د ی} \\
 \text{مسئله:} \quad 8 \quad 2 \times 5 \\
 \text{عمل:} \quad \underline{40} \quad \underline{10} \quad 10 \text{ تا } 5 \text{ می شود } 2 \quad 20 \text{ تا } 5 \text{ می شود } 4 \\
 \quad \quad \quad \underline{0+1} \\
 \text{حاصل ضرب جفتی:} \quad 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{د ی} \\
 \text{مسئله:} \quad 4 \quad 1 \times 3 \\
 \text{عمل:} \quad \underline{12} \quad \underline{03} \quad 3 \text{ تا } 3 \text{ می شود } 1 \quad 12 \text{ تا } 3 \text{ می شود } 4 \quad 3 \text{ یا } 03 \\
 \quad \quad \quad \underline{2+0} \\
 \text{حاصل ضرب جفتی:} \quad 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{د ی} \\
 \text{مسئله:} \quad 1 \quad 4 \times 3 \\
 \text{عمل:} \quad \underline{03} \quad \underline{12} \quad 3 \text{ تا } 3 \text{ می شود } 03 \quad 12 \text{ تا } 3 \text{ می شود } 4 \quad 3 \text{ یا } 03 \\
 \quad \quad \quad \underline{3+1} \\
 \text{حاصل ضرب جفتی:} \quad 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{د ی} \\
 \text{مسئله:} \quad 2 \quad 8 \times 4 \\
 \text{عمل:} \quad \underline{08} \quad \underline{32} \quad 4 \text{ تا } 8 \text{ می شود } 16 \quad 32 \text{ تا } 4 \text{ می شود } 8 \quad 16 \text{ تا } 4 \text{ می شود } 4 \quad 8 \text{ تا } 4 \text{ می شود } 2 \quad 16 \text{ تا } 4 \text{ می شود } 4 \\
 \quad \quad \quad \underline{8+3} \\
 \text{حاصل ضرب جفتی:} \quad 11 \text{ یا } 11
 \end{array}$$

برای به دست آوردن حاصل ضرب جفتی، دو رقم را با یکدیگر جمع می‌کنیم. ممکن است، مثل نتیجه ۱۱ در مثال اخیر، به نتیجه‌ای بیشتر از ۱۰ برسیم. اما توجه کنید که این مجموع بیش از ۱۸ نخواهد شد، در نتیجه با بیش از ده بر یک سر و کار نخواهیم داشت. نکاتی که در مثالهای بالا وجود داشت، به قرار زیر است:

۱. حاصل ضربهای یک رقمی را با فرض وجود صفری جلوی آنها دو رقمی در نظر می‌گیریم. مثلاً ۲ ضرب در ۲ می‌شود ۰۴، و ۶ ضرب در ۱ می‌شود ۰۶. هدف از این کار مقابله با اشتباهی است که ممکن است پیش بیاید. وقتی می‌خواهیم رقم دهگان ۲ ضرب در ۲ را سریعاً پیدا کنیم ممکن است رقم ۴ که فوراً به ذهنمان می‌آید ما را دچار اشتباه کند.

۲. وقتی دو حاصل ضرب جزئی، یعنی رقم دهگان یکی و رقم یکان دیگری، را جمع می‌کنیم، ممکن است حاصل جمع بیشتر از ۱۰ شود؛ یعنی ممکن است مجموع آنها دو رقمی در آید. در این مورد، طبق معمول، رقم یکان (مثلاً رقم ۳ از ۱۳) را می‌نویسیم و رقم دهگان (رقم ۱ از ۱۳) را به صورت نقطه‌ای نشان می‌دهیم. این کار به منزله نقل کردن یک (ده بر یک) است. اما نقل کردن رقم یک، کار ساده‌ای است. در اینجا هیچ وقت لازم نمی‌شود ۱۵ را نقل کنیم. حال آنکه در بعضی دیگر از روشهای ضرب، وقتی برای یکی از رقمهای جواب به مجموع ۱۵۳ برسیم باید ۱۵ را به مرتبه بعد نقل کنیم. کوچک بودن رقم نقل شده مهم است زیرا نشان می‌دهد که رقمهایی که با آنها سروکار داشته‌ایم کوچک بوده‌اند.

۳. همیشه به یاد داشته باشیم که حاصل ضرب صفر در هر عددی صفر است، ولی هر عددی اگر در یک ضرب شود تغییری نمی‌کند.

۴. تنها یک یا دو بار باید محاسبه حاصل ضرب جفتی به طور کامل، چنانکه در صفحات قبل برای ۳۸ ضرب در ۴ نشان دادیم، نوشته شود. بعد از یکی دو بار نوشتن، باید آن قدر فکر خود را متمرکز کنیم تا دو عدد — مثل ۱۲ و ۳۲ — در ذهنمان مجسم شود و رقمهای داخلی را

به یکدیگر بیفزاییم (و ۵ حاصل شود). تجسم کردن این کار در ذهن، حتی بدون تمرین داشتن، کار آسانی است. مهم این است که عمل بدون معطلی انجام شود. در واقع می‌خواهیم خود را به حدی برسانیم که احساس کنیم بعضی از مرحله‌ها را کنار گذاشته‌ایم - که در واقع به معنای آن است که بعضی از مراحل محاسبه را بدون تمرکز یا توجه به آنها انجام می‌دهیم. این مهارت بر اثر تمرین به دست می‌آید.

با در نظر داشتن نکاتی که در بالا گفته شد، بد نیست چند مسئله دیگر را حل کنید:

د ی

۶ ۲ × ۳

د ی

۳ ۵ × ۷

د ی

۶ ۳ × ۵

د ی

۷ ۵ × ۷

د ی

۶ ۶ × ۵

د ی

۲ ۶ × ۳

د ی

۷ ۲ × ۵

د ی

۹ ۴ × ۳

د ی

۴ ۱ × ۸

د ی

۱ ۶ × ۶

خوب، حالا صبر کنید. آیا تا اینجا همه چیز به طور کامل برایتان روشن است؟ اگر نیست، جا دارد که برگردید و آنچه را لازم است دوباره بخوانید. مطالبی که در چند صفحه اخیر مطرح شد پیچیده نیست ولی خیلی اهمیت دارد که کاملاً درک کرده باشید. این مطالب در واقع هسته اصلی روش این فصل را تشکیل می‌دهند.

ضرب کردن در اعداد یک رقمی

برای انجام ضربهای ساده می توانیم از حاصل ضربهای جفتی که قبلاً ذکر شده استفاده کنیم. فرض کنید می خواهیم ۳۱۱۲ را در ۶ ضرب کنیم. البته، این مثال ساده‌ای است، ولی ما از مثالهای ساده شروع می کنیم و کم کم به مثالهای مشکلتر می پردازیم. برای انجام این ضرب با استفاده از حاصل ضربهای جفتی به شیوه تازه‌ای عمل می کنیم. در این شیوه، نکته اساسی این است که:

هر حاصل ضرب جفتی، یک رقم از جواب مطلوب است.

بد نیست یک مثال را به طور کامل حل کنیم. مانند روال فصل گذشته، صفری جلو مضروب می گذاریم. ضمناً از دو حرف «دی» حرف ی را بالای محلی می گذاریم که رقم بعدی جواب — که فعلاً اولین رقم است — در آن نوشته خواهد شد:

$$\begin{array}{r} \text{دی} \\ ۰۳۱۱۲ \times ۶ \end{array}$$

حرف «د» فعلاً کاری نمی کند زیرا بالای هیچ رقمی نیست. تنها رقم یکان ۲ ضرب در ۶ را اختیار می کنیم.

مرحله اول:

$$\begin{array}{r} \text{دی} \\ ۰۳۱۱۲ \times ۶ \\ \hline ۲ \end{array}$$

این ۲ رقم یکان ۱۲ است

مرحله دوم:

$$\begin{array}{r} \text{دی} \\ ۰۳۱۱۲ \times ۶ \\ \hline ۷۲ \end{array}$$

دو حرف «دی» به سمت چپ جابه‌جا شده‌اند. علت آن است که حرف ی در «دی» همیشه بالای محلی قرار می‌گیرد که رقم بعدی جواب، یعنی ۷، در آن ظاهر خواهد شد. در این مثال، ۷ حاصل ضرب جفتی به دست آمده از رقم یکان ۶ (که حاصل ضرب ۱ در ۶ است) بعلاوه رقم دهگان ۱۲ (۲ ضرب در ۶) است.

در مرحله اول، رقم ۲ از ۳۱۱۲ به عنوان «ی» به کار رفت. در مرحله دوم دوباره از آن استفاده شد ولی این بار به عنوان «د». همیشه همین طور است. هر رقم از مضروب دو بار وارد کار می‌شود، یک بار زیر «ی» از «دی» و یک بار زیر «د».

مرحله سوم: «دی» را به رقم بعدی مضروب منتقل می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} \text{د ی} \\ ۰۳۱۱۲ \times ۶ \\ \hline ۶۷۲ \end{array}$$

این ۶ حاصل ضرب جفتی حاصل از رقم یکان ۶ (۱ ضرب در ۶ می‌شود ۶)، بعلاوه رقم دهگان ۱۲ (باز هم ۱ ضرب در ۶ می‌شود ۶) است.

مرحله چهارم: به سراغ رقم بعدی مضروب می‌رویم.

$$\begin{array}{r} \text{د ی} \\ ۰۳۱۱۲ \times ۶ \\ \hline ۸۶۷۲ \end{array}$$

این ۸ حاصل ضرب جفتی حاصل از رقم یکان ۱۸ (۳ ضرب در ۶)، بعلاوه رقم دهگان ۱۲ (۱ ضرب در ۶ می‌شود ۶) است. مرحله پنجم: به رقم آخر می‌رویم که همان صفر واقع در جلوی مضروب است.

د ی

$$\begin{array}{r} ۰ \ ۳ \ ۱ \ ۱ \ ۲ \ \times \ ۶ \\ \hline ۱ \ ۸ \ ۶ \ ۷ \ ۲ \end{array}$$

این عدد حاصل ضرب جفتی حاصل از رقم دهگان ۱۸ (سه ۶ تا)، بعلاوه رقم یکان ۰۵ (صفر ضرب در ۶ می شود صفر) است.

مسلماً وقتی در مضروب به رقم صفر می رسیم، دیگر لزومی ندارد راجع به رقم یکان یا رقم دهگان فکر کنیم. وقتی ۶ در صفر ضرب شود، حاصل چیزی جز صفر نیست.

در این روش، بر خلاف آنچه در روش مستقیم گفته شد، دلیلی برای پرهیز از رقمهای بزرگ وجود ندارد. بد نیست به جای مثالهای ساده‌ای که صرفاً شامل رقمهای ۱، ۲، ۳، بود، اکنون مسئله‌ای با رقمهای بزرگتر مطرح کنیم. اکنون که با مفهوم حروف «د ی» در بالا جفتهای ارقام آشنا شدیم، می توانیم آنها را ننویسیم. از طرف دیگر هنوز این خطر هست که محل عمل را گم کنیم و رقمی را نابجا اختیار کنیم. به عنوان چاره موقت، خط خمیده‌ای رسم می کنیم که یک سرش دو شاخه است و به کمک آن، هر دو رقم جفت ارقام را نشان می دهیم:

مرحله اول:

$$\begin{array}{r} ۰ \ ۷ \ ۵ \ ۸ \ - \times \ ۷ \\ ۶ \end{array}$$

رقم یکان ۵۶، خط تیره چیزی پدید نمی آورد و دهگانی ندارد

مرحله دوم:

$$\begin{array}{r} ۰ \ ۷ \ ۵ \ ۸ \ - \times \ ۷ \\ ۰۰ \ ۶ \end{array}$$

این ۵۰ (۱۵) حاصل جمع رقم یکان ۳۵ (پنج ۷ تا) و رقم دهگان ۵۶ (هشت ۷ تا) است

مرحله سوم:

$$\begin{array}{r} \text{○} \quad \text{۷} \quad \text{۵} \quad \text{۸} \quad - \quad \text{X} \quad \text{۷} \\ \hline \end{array}$$

$$\text{○} \quad \text{۳} \quad \text{۰} \quad \text{۵} \quad \text{۶}$$

این ۳ یا ۱۳ حاصل جمع رقم یکان ۴۹ (هفت ۷ تا)

و رقم دهگان ۳۵ (پنج ۷ تا) و ده بر یک ۵ است

مرحله چهارم:

$$\text{○} \quad \text{۷} \quad \text{۵} \quad \text{۸} \quad - \quad \text{X} \quad \text{۷}$$

$$\text{○} \quad \text{۵} \quad \text{۰} \quad \text{۳} \quad \text{۶}$$

این ۵ حاصل جمع رقم دهگان ۴۹ (هفت ۷ تا)

و ده بر یک ۳ است؛ صفر حاصل از صفر ۷ تا،

تأثیری در نتیجه ندارد

پس جواب ۵۳۰۶ است.

در این مثال از همه مزایای روش یکان و دهگان استفاده نکردیم. این مسئله راحتی با روش ضرب معمولی براحتی می شد حل کرد. نکته مهم این است که این گفته تنها در مورد ساده ترین مثالها صادق است. در اغلب مواردی که لازم می شود عمل ضربی انجام دهیم، اعدادی که با آنها سرو کار داریم عمداً طوری انتخاب نشده اند که کار با آنها راحت باشد. روش یکان و دهگان برای هر نوع ضربی قابل استفاده است.

وقتی از مرحله ضرب کردن در رقمهای ساده ای چون ۶ و ۷ بگذریم و به مضروب فیه های طولانیتر برسیم، مزایای روش یکان و دهگان را خواهیم دید. در عین حال، این عمل ضرب در اعداد یک رقمی، تمرین بسیار خوبی است زیرا هر مضروب فیه طولانی از تعدادی رقم تشکیل یافته و محاسبه برای آن عملاً تعمیم کاری است که تاکنون کرده ایم.

ضمناً اگر به مسئله اخیری که حل کردیم برگردیم و به طرز حرکت خط دو شاخه در طول مضروب و به سمت چپ توجه کنیم، پی می بریم که چرا این روش را روش «دو انگشتی» نامیده اند. کسی که تازه با این

روش آشنا می شود ممکن است در حفظ کردن محل عمل، یعنی در به خاطر سپردن جفت ارقامی که در حال ضرب کردن آنهاست، و اینکه کدام یک دارای نشانه یکان است، دچار اشکال شود. برای آنکه محل عمل ضمن پیش بردن ضرب از دست نرود، شخص می تواند دو انگشت سیابه و میانی دست چپ خود را به سوی دو رقم جفت ارقام نگاه دارد. انگشت میانی دست چپ را «انگشت یکان» و انگشت سیابه را «انگشت دهگان» می نامیم. به این ترتیب، شخص تازه کار با مشخص کردن انگشتهایش، همیشه می تواند محل انجام عمل را با گذاشتن انگشتهایش به سوی جفت ارقام، حفظ کند. در این کار انگشت میانی نقش حرف «ی» را دارد که در بالای اعداد می نوشتیم و انگشت سیابه نیز به منزله حرف «د» است. اگر شما هم احساس می کنید که این شیوه کمکتان می کند، چه بهتر که از آن استفاده کنید. در هر صورت، خیلی زود متوجه خواهید شد که می توانید از گذاشتن انگشت چشم پوشی کنید زیرا محل عمل را گم نمی کنید.

از سوی دیگر، حتی پس از آنکه دیدید که می توانید کار را بدون گذاشتن انگشت یا کشیدن خطهای خمیده پیش ببرید، همچنان باید عادت کنید که عمل را به صورتی پاکیزه و مرتب انجام دهید. رعایت نظم و ترتیب در انجام کار ابزار ساده ای برای پیشگیری از خطای احتمالی ناشی از بی دقتی شخص است، بخصوص وقتی که کسی عمل را با سرعت انجام می دهد. البته درستی این نکته چنان بدیهی است که ظاهراً نیازی به یادآوری ندارد. متأسفانه، تجربه نشان می دهد که اغلب مردم، حتی اکثریت افراد کاملاً دانش آموخته، عملیات را به صورتی در هم و نامنظم می نویسند.

یک یا چند تا از این مثالها را حل کنید و در این کار برای حفظ کردن محل عمل، از دست خود یا از هر شیوه دیگری کمک بگیرید:

$$۱. \quad ۵ \ ۶ \times ۸$$

$$۳. \quad ۸ \ ۵ \ ۴ \times ۲$$

$$۲. \quad ۵ \ ۶ \ ۷ \times ۹$$

$$۴. \quad ۸ \ ۴ \ ۵ \ ۶ \ ۳ \times ۶$$

: جوابها

$$۱. \ ۴۴۸ \quad ۲. \ ۵۱۵۳ \quad ۳. \ ۳۴۱۶ \quad ۴. \ ۵۵۷۳۷۸$$

حالا خودتان مثالهایی طرح و آنها را حل کنید. هر چه بیشتر از این مثالهای ساده حل کنید، ضربهای طولانی و دشوار را سریعتر و راحتتر انجام خواهید داد. این عمل ضرب در اعداد یک رقمی زیر بنای روش ضرب سریع است.

ضرب کردن در عددهای دو رقمی

تا اینجا اعدادی به طول دلخواه را در عددهای یک رقمی مثل ۶ یا ۷ ضرب می کردیم. اما چطور می توانیم عددی طولانی را، مثلاً در ۳۷، ضرب کنیم؟ یا در ۲۲۳۷؟ روش خود را نخست برای مضروب فیه های دو رقمی تعمیم می دهیم.

مطلب کلی آن است که اکنون روش فصل پیش را با آنچه در این فصل انجام داده ایم ترکیب می کنیم. این موضوع نه فقط برای مضروب فیه های دو رقمی بلکه برای هر مضروب فیهی صادق است. اگر به یاد بیاورید که با جفتهای بیرونی و درونی چگونه کار می کردیم و در طول اعداد پیش می رفتیم، خواهید دید که اینجا هم همان کار را می کنیم. تنها تفاوت در این است که اکنون از موضوع یکان و دهگان هم استفاده می کنیم.

مسئله ۷۳ ضرب در ۵۴ را در نظر بگیرید. در فصل پیش چنین مسائلی را با جفتهای بیرونی و درونی حل می کردیم. البته بهتر است فعلاً به عمل ضرب طبق روش فصل گذشته کاری نداشته باشیم، اما به منظور

مقایسه، نحوه جفت شدن رقمها را با یکدیگر نشان خواهیم داد. محل رقمی از جواب را که در هر مرحله به دست می آید با علامت X نشان می دهیم:

مرحله اول:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{---} & & & \\ & & & \text{---} & & & \\ \circ & \circ & 7 & 3 & X & 5 & 4 \end{array}$$

X لازم نیست عمل کنید! فقط به محل خطهای خمیده توجه کنید

مرحله دوم:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{---} & & & \\ & & & \text{---} & & & \\ \circ & \circ & 7 & 3 & X & 5 & 4 \\ & & & & X & & \end{array}$$

مرحله سوم:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{---} & & & \\ & & & \text{---} & & & \\ \circ & \circ & 7 & 3 & X & 5 & 4 \\ \hline & & & & X & & \end{array}$$

مرحله چهارم:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{---} & & & \\ & & & \text{---} & & & \\ \circ & \circ & 7 & 3 & X & 5 & 4 \\ \hline & & & & X & & \end{array}$$

این آخرین ده بریک است

این کاری است که در فصل قبل می کردیم. اکنون این کار را مقایسه کنید با نمودارهایی که برای روش این فصل داشتیم. در اینجا هم هنوز نمی خواهیم مسئله را حل کنیم بلکه صرفاً قصد داریم بینیم خطهای جفتی چگونه جابه جا می شوند:

$$\frac{\circ \circ \gamma \gamma - X \Delta \gamma}{X}$$

آیا توجه کرده‌اید که رقمی از مضروب واقع در بالای محلی که رقم بعدی جواب باید در آن وارد شود، همچنان بخشی از جفت بیرونی است؟

$\begin{array}{ccccccc} & & 6 & 3 & & & \\ & & | & / & & & \\ \circ & \circ & \gamma & \gamma & \times & \Delta & \gamma \\ & & 28 & + & 12 & & \end{array}$

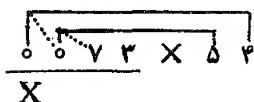
پیش از اتمام محاسبه، توجه کنید که خطها در بالای مضروب درست همان طوری جابه جا می شوند که در روش فصل قبل می شدند:

مرحله سوم:

A horizontal beam of length 6m is shown. A triangular load starts at 0 at the left end and increases linearly to 10 kN/m at the right end. A reaction force 'X' is indicated at the left end. The beam is divided into segments of 2m, 1m, 1m, 1m, 1m, and 0m.

اکنون رقم ۴ از ۵۴ هم به صفر وصل است هم به ۷؛
بعلاوه، رقم ۵ به ۷ و ۳ وصل است

مرحله چهارم:



نکته مهم: در این روش، محل خطها بیشترین اهمیت را داراست. راز اصلی دسترسی به جواب درست همین است. بقیه کار، یعنی ضرب کردن رقمها در یکدیگر و اختیار کردن رقم یکان یا دهگان حاصل ضرب آنها کار آسانی است. بعلاوه، قبلاً در این کارها مهارت یافته‌اید. برای انجام ضربهای دشوار با عددهای طولانی، دشواری کار تماماً در به کار گرفتن دو رقم بجاست که با یکدیگر جفت و در هم ضرب شوند. با استفاده از جفت مناسب رقمها در موقع درست، رقم بعدی جواب حاصل می‌شود.

اینجا هم مثل روش فصل گذشته، رقمی از مضروب که درست بالای محلی واقع است که رقم بعدی جواب باید در آن وارد شود، بخشی از جفت بیرونی است؛ بویژه در روش فعلی این محل جای رقم یکان جفت بیرونی را مشخص می‌کند؛ رقم دهگان رقمی است که بلافاصله در طرف راست آن واقع است. از اینجا کار را به سمت داخل ادامه می‌دهیم و محل رقمهای یکان و دهگان جفت درونی را تعیین می‌کنیم.

برای یافتن رقم بعدی جواب، می‌توانید خط واقع در منتهی‌الیه سمت چپ الگوی کوچکی از خطها را که در نمودار بالا دیدیم رسم کنید یا رسم شده بینگارید. این خط درست بالای رقم بعدی جواب که باید محاسبه شود قرار می‌گیرد. در این صورت اگر نمودار را خوب دیده باشید و چگونگی آن را دریافته باشید، براحتی می‌توانید بقیه آن الگو را نزد خود مجسم کنید. حل کامل این مثال به قرار زیر است:

مرحله اول:

$$\begin{array}{r} \circ \circ ۷ ۳ \\ \hline ۲ \end{array}$$

رقم یکان ۳ ضرب در ۲، ۶ است؛ خطهای دیگر تماس کامل ندارند

مرحله دوم:

$$\begin{array}{r} \text{د ی} \\ \circ \circ ۷ ۳ \\ \hline ۰۴ ۲ \end{array}$$

از رقم ۴ در ۵۴ داریم ۲۸ بعلاوه ۱۲ که می شود ۴۰
از رقم ۵ داریم ۱۵ بعلاوه صفر که می شود ۱۵
مجموع ۱۴ است

شاید اگر شکل را ساده تر کنیم، نکته اصلی آشکارتر دیده شود،
مثل شکل زیر:

د ی

د ی

$$\begin{array}{r} \circ \circ ۷ ۳ - \times ۵ ۲ \\ \hline ۰۴ ۲ \end{array}$$

جواب :

از ۴ داریم : $۲۸ + ۱۲$

از ۵ داریم : $۱۵ + ۰$ حاصل جمع رقمهای یکان و دهگان که
زیرشان خط کشیده شده، ۸ بعلاوه ۱
بعلاوه ۵ بعلاوه صفر می شود ۱۴

معنای نمودار آن است که ما رقم ۴ از ۵ را به صورت زیر، در جفت
ارقام ۷۳ ضرب می کنیم:

د ی

$$۷ ۳ \times ۲$$

سپس رقم ۵ از ۵ ۴ را روی جفت ۳ و هیچ اثر می دهیم:

۵ ی

$$۳ - \times ۵$$

بر اساس همان روش معمولی یکان و دهگان که قبلاً به آن پرداختیم، حاصل ۴×۷۳ می شود ۹ (زیرا ۲۸ بعلاوه ۱۲ می شود ۹) و حاصل ۵×۳ می شود ۵ (۱۵ بعلاوه هیچ). این دو حاصل را جمع می کنیم؛ ۹ بعلاوه ۵ می شود ۱۴، که ۴ را می نویسیم و به جای رقم ۱ از ۱۴، نقطه‌ای می گذاریم.

عملاً موقع کار همه اینها باید در ذهن انجام شود. در اینجا صرفاً به منظور توضیح دادن همه جزئیات را می نویسیم. پس از آنکه مدتی با روش یکان و دهگان تمرین کردیم، انجام این کارها به طور ذهنی راحت خواهد بود. به همین علت بود که پیشتر گفتیم که تمرین کردن عمل ضرب در اعداد یک رقمی به عنوان مقدمه فراگیری کل این روش، بسیار مفید است.

مرحله سوم:

$$\begin{array}{r} \text{۵ ی} \\ \text{۵ ی} \\ \hline ۰ \quad ۰ \quad ۷ \quad ۳ \quad \times \quad ۵ \quad ۴ \\ \hline ۰ \quad ۰ \quad ۴ \quad ۲ \end{array}$$

جواب :

از ۴ داریم :

$$۰ + ۲۸$$

از ۵ داریم :

$$۳۵ + ۱۵$$

با افزودن رقمهای یکان و دهگان مشخص

شده داریم ۵ بعلاوه ۲ بعلاوه ۵ بعلاوه

۱ می شود ۸، با افزودن ده بر یک، حاصل ۹ می شود.

مرحله چهارم:

۵ ی

۵ ی

۵ ۴ × ۳ ۷ ۰ ۰

جواب : ۲ ۰۲ ۹ ۳

از ۴ داریم : ۰ ۰

وقتی در صفر ضرب می کنیم لزومی ندارد نتیجه ۰۰ را بنویسیم، معلوم است که چیزی: ۰ بعلاوه ۰ بعلاوه ۰

بعلاوه ۳ می شود ۳

پس جواب ۳۹۴۲ است.

ضرب اعداد طولانی در عددهای دو رقمی

با همین روش می توانیم عددی به هر طول را در عددی دو رقمی ضرب کنیم. در مثال قبل، ۷۳ را در ۵۴ ضرب کردیم. فرض کنید اکنون می خواهیم ۵۲۷۳ را در ۵۴ ضرب کنیم. دو مرحله اول عیناً مانند مثال قبل است:

مرحله اول:

۵ ی ←
۵ ۴ × ۳ ۷ ۲ ۵ ۰ ۰
۲

از ۴ داریم ۱۲ بعلاوه صفر

مرحله دوم:

۵ ی ←
۵ ی ←
۵ ۴ × ۳ ۷ ۲ ۵ ۰ ۰
۲ ۰۴

از ۴ داریم ۲۸ بعلاوه ۱۲؛ از ۵ داریم ۱۵ بعلاوه صفر؛

مجموع رقمهای مشخص شده می شود ۱۴

حالا همین شیوه را ادامه می دهیم:
مرحله سوم:

$$\begin{array}{r}
 \text{د ی} \leftarrow \\
 \text{د ی} \leftarrow \\
 \begin{array}{r}
 ۰۰۵۲۷۳ \times ۵۲ \\
 \hline
 ۰۷۰۴۲ \\
 \hline
 ۰۸+۲۸
 \end{array}
 \end{array}$$

از ۴ داریم:

از ۵ داریم:

مجموع رقمهای مشخص شده ۱۶ است
که با ده بر یک می شود ۱۷

مرحله چهارم:

$$\begin{array}{r}
 \text{د ی} \leftarrow \\
 \text{د ی} \leftarrow \\
 \begin{array}{r}
 ۰۰۵۲۷۳ \times ۵۲ \\
 \hline
 ۲۰۷۰۴۲ \\
 \hline
 ۲۰+۰۸
 \end{array}
 \end{array}$$

از ۴ داریم:

از ۵ داریم:

مجموع رقمهای مشخص شده ۳ است
که با ده بر یک نقل شده از ۱۷ می شود ۴

مرحله پنجم:

$$\begin{array}{r}
 \text{د ی} \leftarrow \\
 \text{د ی} \leftarrow \\
 \begin{array}{r}
 ۰۰۵۲۷۳ \times ۵۲ \\
 \hline
 ۸۲۰۷۰۴۲
 \end{array}
 \end{array}$$

این یکی را خودتان حساب کنید

آخرین مرحله:

$$\begin{array}{r}
 \text{د ی} \quad \leftarrow \quad \text{د ی} \\
 \text{د ی} \quad \leftarrow \quad \text{د ی} \\
 \hline
 \begin{array}{cccccccc}
 \circ & \circ & ۵ & ۲ & ۷ & ۳ & \times & ۵ & ۲ \\
 \hline
 ۲ & ۸ & ۴ & ۰ & ۷ & ۰ & ۴ & ۲ \\
 \hline
 \circ & + & \circ & & & & & \\
 \hline
 \circ & + & ۲۵ & & & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

پس جواب ۲۸۴۷۴۲ است.

مسلمان در موارد عملی همه این رقمها را در هر مرحله مجدداً نمی‌نویسیم — همان یک بار کافی است! — و هیچ یک از رقمهای نشان‌دهنده «عمل» را یادداشت نمی‌کنیم. همه این کارها را می‌توانیم براحتی در ذهن خود انجام دهیم. اگر در مورد حاصل ضربهای جفتی تمرین کافی داشته باشیم، محاسبه سریع و راحت انجام می‌شود. مثلاً با دیدن ۷۳ ضرب در رقم ۴، مثلاً از ۵۴، تقریباً بلافاصله می‌گوییم «۹». پس از آنکه به قدر کافی تمرین کردیم بی‌هیچ تلاش ذهنی می‌توانیم $۱۲ + ۲۵$ را تجسم کنیم. در واقع، چنانکه قبلاً نیز گفتیم این کار به صورت عملی نیمه خود کار در می‌آید و بدون نیاز به تمرکز تمامی توجه شخص، انجام می‌شود. هدف ما هم رسیدن به این جایگاه است.

ضرب در عددهای سه رقمی

برای ضرب کردن عددی به طول دلخواه، در یک مضروب فیه سه رقمی، مثل ۲۷۳ ضرب در ۱۵۴، یا ۵۲۷۳ ضرب در ۱۵۴، یا ۲۳۵۲۷۳ ضرب در ۱۵۴ همان اصول کلی به کار می‌آید. اما در این حالت، هر رقم از

جواب مجموع سه جزء است. قبلاً هر رقم از جواب، مجموع دو جزء بود. چنانکه خواهیم دید، هر یک از این سه جزء، از یک جفت ارقام جداگانه، با استفاده از موضوع آشنای یکان و دهگان، به دست می آید. بد نیست مثالی حل کنیم، 273×154 را به دست می آوریم. ابتدا ۳ صفر جلوی مضروب می گذاریم (154 عددی ۳ رقمی است!).

مرحله اول:

$$\begin{array}{r}
 \text{دی} \leftarrow \\
 \begin{array}{r}
 000273 \times 154 \\
 \hline
 2
 \end{array}
 \end{array}$$

رقمهای ۵ و ۱ در 154 با چیزی جفت نمی شوند، پس در جواب اثر ندارند

$12 + 0$: از رقم ۲ در عدد 154 داریم

مرحله دوم:

$$\begin{array}{r}
 \text{دی} \leftarrow \\
 \begin{array}{r}
 \text{دی} \leftarrow \\
 \text{دی} \leftarrow \\
 000273 \times 154 \\
 \hline
 04 \quad 2
 \end{array}
 \end{array}$$

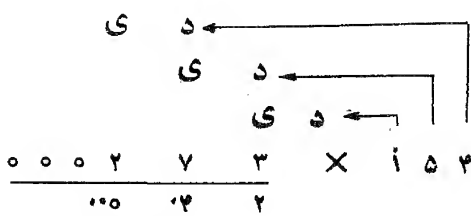
از ۱ چیزی حاصل نمی شود زیرا این رقم با چیزی جفت نمی شود

$28 + 12 = 9$: از ۲ داریم

$15 + 0 = 5$: از ۵ داریم

در واقع، اگر این کار را با مثال قبل مقایسه کنید، در می یابید که تا اینجای کار هیچ تفاوتی با آن ندارد. علت آن است که هنوز از رقم ۱ در 154 برای یافتن جواب استفاده نشده است؛ به عبارت دیگر هنوز این ۱ با هیچ جزئی از 273 جفت نشده است. حالا کار را ادامه می دهیم:

مرحلة سوم:



مجموعه رقمهای مشخص شده می شود

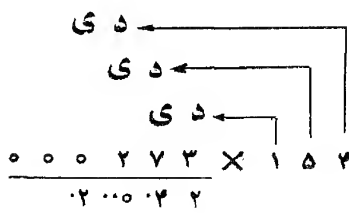
۱۹ که با ده بر یک می شود ۲۰

۵۸۴۲۸ : از ۴ داریم

از ۱۵ تا ۳۵ :

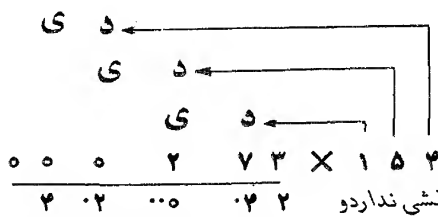
۵۳+۵ : از ایداریم

مرحلۂ چہارم:



رقم ۴ هنوز نقشی دارد؛ رقم دهگان ۲ ضرب در ۴ از آن گرفته می‌شود. اما این رقم صفر است، زیرا حاصل ۲ ضرب در ۴ می‌شود ۰۸. در این مرحله نقش واقعی فقط مربوط است به ۵ که به ازای آن: ۱۵ بعلاوه ۳۵، و ۱ که به ازای آن: ۰۷ بعلاوه ۰۳ را داریم.

مرحلہ پنجم:



در این مرحله رقم ۴ نقشی ندارد و

«دی» آن فقط شامل صفر است

• + • : از ما داریم

۰+۱۰ : از ۵ داریم

۵۷+۵۲ : از ۱ داریم

مرحله آخر:

د ی

$$\begin{array}{r} ۰۰۰۲۷۳ \times ۱۵۲ \\ \hline ۰۲۲۰۴۲ \end{array}$$

جواب ۴۲۰۴۲ است. از این مثال روشن می شود که اگر مضروب فیه دارای چهار رقم یا بیشتر باشد چه باید کرد.

در این مبحث مضروب فیه هایی را که رفته رفته طولانیتر می شدند در نظر گرفتیم، اول یک رقمی، بعد دو رقمی، سپس سه رقمی و البته این کار موجب شد که برخی مطالب چند بار تکرار شود. این نحوه بیان مرحله به مرحله در وهله نخست به این منظور اختیار شد که مطمئن شویم موضوع بروشنی عرضه شده و خواسته ایم که خواننده آن را بخوبی درک کند. باید بیفزاییم که در این شیوه مرحله به مرحله منظور دیگری هم داشته ایم. این نحوه بیان، تأکید می کند روش درست تمرین کردن این روش به همین صورت است. وقتی دهها عمل ضرب در اعداد یک رقمی انجام شود، کار با مضروب فیه های دو رقمی به همان آسانی که واقعاً هم هست به نظر خواهد رسید. تمرین کردن با مضروب فیه های دو رقمی به حدی که مهارتی در آن حاصل شود، ضربهای طولانیتر را آسان خواهد کرد. روی هم رفته، مقدار تمرین لازم برای تسلط یافتن به کل این روش مجموعاً چیزی در حدود چند ساعت است. در پایان این تمرینها، مجهز به روشی تازه و جالب و سرعت جدیدی در محاسبه خواهیم بود. میزان سرعت به دست آمده بستگی به مقدار تمرینی دارد که صرف آن می کنیم؛ با تمرین کافی می توانیم به سرعتهای شگفت انگیز برسیم.

چکیده مطالب

به طور خلاصه، روش دو انگشتی شامل سه ویژگی زیر است:

۱. در اینجا با تشکیل حاصل ضرب جفتی سر و کار داریم، که مثلاً حاصل ضرب جفتی ۷ را برای ۵۳ ضرب در ۷ می‌دهد:

$$\begin{array}{r}
 \text{د ی} \\
 ۵۳ \times ۷ \\
 \hline
 ۳۵ + ۲۱ \\
 ۵ + ۲ \\
 ۷
 \end{array}$$

حاصل ضرب جفتی

۲. در این روش، شیوه‌ای برای ضرب کردن هر عدد در یک رقم داریم که به کمک حاصل ضربهای جفتی انجام می‌شود:

$$\begin{array}{r}
 \text{د ی} \\
 ۵۳۲۵۳ \times ۷ \\
 \hline
 ۱
 \end{array}$$

رقم یکان ۳ ضرب در ۷ که ۲۱ است، ۱ است

$$\begin{array}{r}
 \text{د ی} \\
 ۵۳۲۵۳ \times ۷ \\
 \hline
 ۷۱
 \end{array}$$

این ۷ حاصل ضرب جفتی ۷ در ۵۳ است

این کار را ادامه می‌دهیم تا مرحله آخر:

$$\begin{array}{r}
 \text{د ی} \\
 ۵۳۲۵۳ \times ۷ \\
 \hline
 ۲۲۷۷۱
 \end{array}$$

۳. این روش ضرب در اعداد یک رقمی را می‌توانیم برای ضرب در اعدادی به هر طول تعمیم دهیم. در این مورد برای یافتن هر رقم از جواب، چند حاصل ضرب جفتی تشکیل و حاصل آنها با یکدیگر جمع می‌شود. این چند حاصل ضرب جفتی همان جفتهای «بیرونی» و «درونی» هستند که با حرکت از دو انتها به طرف داخل و به سوی فضای بین دو عددی که در هم ضرب می‌شوند، اختیار می‌شوند:

د ی

د ی

$$\begin{array}{r} 0073 \\ \times 52 \\ \hline 2 \end{array}$$

سپس

د ی

د ی

$$\begin{array}{r} 0073 \\ \times 52 \\ \hline 042 \end{array}$$

این ۱۴ مجموع ۸ و ۱ و ۵ است که از ۲۸، ۱۲ و ۱۵ گرفته شده‌اند.

این کار را ادامه می‌دهیم تا مرحله آخر:

د ی

د ی

$$\begin{array}{r} 0073 \\ \times 52 \\ \hline 39022 \end{array}$$

به یاد داشته باشید که در هر مسئله‌ای، اولین «ی» در الگوی «د ی» — یعنی «ی» واقع در منتهی الیه سمت چپ — همیشه درست بالای محلی قرار می‌گیرد که رقم بعدی جواب در آن نوشته خواهد شد.

مسائلی برای تمرین

حاصل ضرب جفتی جفت ارقام زیر را به صدای بلند بگویید (جواب در پایان تمرینها داده شده است):

$$۱. ۶۷ \times ۸$$

$$۳. ۹۴ \times ۲$$

$$۵. ۶۶ \times ۷$$

$$۲. ۵۶ \times ۴$$

$$۴. ۷۷ \times ۶$$

$$۶. ۵۹ \times ۷$$

ضربهای زیر در اعداد یک رقمی را با استفاده از یک حاصل ضرب جفتی برای هر رقم از جواب انجام دهید:

$$۷. ۵۶ \times ۴$$

$$۸. ۸۲ \times ۸$$

$$۹. ۳۹۴۵ \times ۶$$

ضربهای زیر را با استفاده از حاصل ضربهای جفتی و جفتهای درونی و بیرونی انجام دهید (دو حاصل ضرب جفتی برای هر رقم از جواب):

$$۱۰. ۹۵ \times ۶۲$$

$$۱۲. ۸۳ \times ۴۵$$

$$۱۴. ۴۳۵۴۶ \times ۶۲$$

$$۱۱. ۳۸ \times ۶۶$$

$$۱۳. ۳۴۵۶ \times ۸۶$$

جوابها:

$$۱. ۱۳$$

$$۵. ۶$$

$$۹. ۲۳۶۷۵$$

$$۱۳. ۲۹۷۲۱۶$$

$$۲. ۲$$

$$۶. ۱۱$$

$$۱۰. ۵۸۹۵$$

$$۱۴. ۲۶۹۹۸۵۲$$

$$۳. ۸$$

$$۷. ۲۲۴$$

$$۱۱. ۲۵۰۸$$

$$۴. ۶$$

$$۸. ۶۵۶$$

$$۱۲. ۳۷۳۵$$

فصل چهارم

عمل جمع و یافتن جواب درست

در فصلهای گذشته روشهایی برای عمل ضرب با تأکید بر سرعت کار بیان کردیم. در عین حال، به لزوم دقت نیز توجه داشتیم و اهمیت امتحان کردن نتایج را نشان دادیم.

در مورد جمع نیز با این دو عامل، یعنی سرعت و دقت، سرو کار داریم. در این فصل روشی برای عمل جمع بیان می‌کنیم که سریعتر از روش مورد استفادهٔ اغلب مردم است، و شیوه‌ای برای امتحان کردن و امتحان مجدد نتایج مطرح می‌کنیم. اما اینجا بر جنبه‌های دیگری تأکید می‌شود. در استفاده از روش جمع معمولی، فرد عادی همیشه نمی‌تواند ستون نسبتاً بلندی از ارقام را بدون مرتکب شدن اشتباه، جمع بزند. فرض کنیم چنین کسی می‌خواهد ستونی از اعداد پنج رقمی را با یکدیگر جمع کند. طبعاً باید پنج ستون جداگانه را جمع بزند و احتمال دارد با استفاده از روش جمع معمولی، در یکی از این پنج مورد اشتباهی بکند.

اینجا یاد می‌گیریم که کار خود را با امتحان کردن یکایک ستونها بررسی کنیم، بی آنکه لزومی به تکرار عمل جمع باشد. این کار چند فایده دارد:

۱. از انجام دوباره کار صرفه جویی می کنیم، و در عین حال
 ۲. محل اشتباه را، در صورت وجود، در ستونی که رخ داده پیدا می کنیم
(که با این کار تصحیح آن راحت می شود)، و
 ۳. مطمئن هستیم که اشتباه را پیدا می کنیم، در حالی که در صورت تکرار کل عمل، این اطمینان وجود ندارد.
- این نکته آخر چیزی است که اغلب اشخاص آن را درک نمی کنند. هر یک از ما ضعفهای خاص خود و اشتباهات از نوع خاص خود را داریم. این وضع در مورد املای واژه ها هم وجود دارد: شخصی که سایر واژه ها را درست می نویسد ممکن است کلمه «وهله» را به غلط «وحله» بنویسد، و شخص دیگری ممکن است به جای «زغال» به غلط «ذغال» بنویسد^۱. در حساب هم همین وضع پیش می آید، هر چند ممکن است کمتر به آن توجه کرده باشیم. ممکن است کسی به غلط گرایش داشته باشد به اینکه بگوید هشت ۷ تا می شود ۵۴. اگر مستقیماً از او پرسید خواهد گفت «۵۶ تا» ولی در ضمن محاسبه ای طولانی بر اثر لغزش «۵۴ تا» را به کار می برد. اشخاص دیگر، گیرهای دیگری دارند. این خود دلیلی است بر اینکه تکرار یک محاسبه شیوه کارآمدی برای امتحان کردن آن نیست. همیشه این احتمال وجود دارد که خطایی که محاسبه کننده در نخستین بار مرتکب شده، خطایی باشد که او بدان گرایش دارد، و هنگام امتحان کردن به وسیله تکرار محاسبه، به احتمال زیاد آن خطا را تکرار خواهد کرد.

اگر کسی را راضی کنیم که عمل محاسبه ما را امتحان کند، ممکن است خطاهای «طبیعی» رهایمان نکند. اینها اشتباهاتی هستند که هر کسی در اوضاع مشابه دچارشان می شود. بدخطی اشخاص یکی از عوامل بروز این نوع خطاهاست. اگر کسی عادت داشته باشد که رقم ۵ را به

۱. در متن اصلی دو کلمه انگلیسی parallel و harass مثال آورده شده که گاه به غلط parallell و harrass نوشته می شوند - م.

صورت ۵ بنویسد، هنگام تند نوشتن ممکن است دندانۀ پایین را خوب شکل ندهد و آن را خیلی شبیه به رقم ۵ (صفر) بنویسد. در این صورت، هر کس دیگری هم که کار را امتحان می کند، درست مثل نفر اول که مرتکب اشتباه اصلی شده، آن را ۵ خواهد خواند^۱.

خیلی اشتباهات طبیعی دیگر هم هست که در موارد مختلفی پیش می آید: چند بار تکرار کردن کاری که یک بار باید تکرار شود، جابه جا شدن محل دو کار و انواع دیگری در این ردیف. اما در زندگی روزمره، این خطاهای طبیعی که برای هر کسی طبیعی اند، از خطاهای شخصی ما کم اهمیت ترند، چرا که بندرت می توانیم کسی را پیدا کنیم که به درخواست ما کارمان را امتحان کند.

با توجه به تمامی آنچه گفته شد، این حکم کلی را می توان کرد که عملاً هر نوع روش دیگری برای امتحان کردن، بهتر از تکرار عمل است. در روش تراختنبرگ، شیوۀ خاصی برای امتحان کردن وجود دارد. بعلاوه، در این روش به مرزهای تازه ای از سرعت می رسیم که برای بسیاری از افراد یا شاید برای اغلب اشخاص، تازه گی دارد.

یافتن مجموع

اینجا هم مثل روش معمولی جمع، اعدادی را که باید با هم جمع شوند، در یک ستون می نویسیم و زیر عدد پایینی خطی می کشیم، تا مجموع در زیر ستون ثبت شود. موقع نوشتن اعداد به یاد داریم که قاعدۀ ریاضی برای محل نوشتن اعداد آن است که ممیزها درست زیر هم واقع شوند، یعنی همه در یک ستون قرار گیرند.

۱. در متن اصلی به اشتباه کسی اشاره شده که رقم 4 انگلیسی را به هنگام تند نوشتن به گونه ای بنویسد که ممکن است با 9 اشتباه شود - م.

برای جمع کردن ۱۲/۵، ۲۷۱/۶۵ و ۳/۵۱، می نویسیم:

$$\begin{array}{r} 12/5 \\ 271/65 \\ 3/51 \end{array}$$

خیلی وقتها ممیزی در میان نیست، مثلاً در عدد ۷۳، ولی در این موارد جای ممیز بلافاصله پس از عدد است؛ شکل کامل این عدد ۷۳/ است که البته کسی آن را به این صورت نمی نویسد. بنابراین وقتی اعداد داده شده ممیز ندارند، آنها را بر اساس آخرین رقمشان که جای ممیزهای نانوشته کنار آنهاست ردیف می کنند. این کاری است که در روش معمولی جمع انجام می دادیم، و در این روش جدید هم اعداد را به همین شیوه مرتب می کنیم. نمونه ای از اعداد مرتب شده برای عمل جمع را در زیر می بینید:

$$\begin{array}{r} 3689 \\ 758 \\ 9667 \\ 1064 \\ 6498 \\ 745 \\ 9968 \\ 5887 \\ 9988 \\ 7615 \\ \hline 8749 \end{array}$$

در روش جمع معمولی در این مرحله باید رقمهای ستون دست را با هم جمع کنیم: ۹ بعلاوه ۸ بعلاوه ۷، الی آخر. در صورت تمایل در روش

جدید هم می توانید همین کار را بکنید ولی این کار اجباری نیست: کار را می توانید از هر ستونی آغاز کنید. برای تنوع، از ستون دست چپ شروع می کنیم. رقمها را از بالا به پایین جمع می زنیم ولی این دستور تراختبرگ را به کار می بندیم که:

در شمارش از یازده بالاتر نروید

یعنی وقتی مجموع فرعی بیش از ۱۱ شد، ۱۱ تا از آن کم می کنیم و کار را با باقیمانده کاهش ادامه می دهیم. ضمن این کار یک علامت یا نشانه هم کنار عددی که مجموع را از ۱۱ بیشتر کرده است، می گذاریم. در این مثال، روی ستون دست چپ، که آن را مجدداً در زیر آورده ایم پایین می رویم و محاسبات ذهنی را به صورت زیر انجام می دهیم:

- | | | |
|---|---|--|
| ۳ | ۹ | ۳ بعلاوه ۹، ۱۲: این عدد بیش از ۱۱ است، پس ۱۱ را از ۱۲ کم می کنیم. نشانه ای کنار ۹ می گذاریم و کار جمع را با ۱ ادامه می دهیم. |
| ۱ | ۱ | ۱ بعلاوه ۱، ۲ |
| ۶ | ۲ | ۲ بعلاوه ۶، ۸ |
| ۹ | ۸ | ۸ بعلاوه ۹، ۱۷: نشانه ای می گذاریم و از ۱۷، ۱۱ تا کم می کنیم. می گوئیم «۶» و ادامه می دهیم. |
| ۵ | ۶ | ۶ بعلاوه ۵، ۱۱: نشانه می گذاریم، می گوئیم «صفر»، و ادامه می دهیم. |
| ۹ | | |
| ۷ | ۹ | ۹ بعلاوه ۷، ۱۶: نشانه می گذاریم، می گوئیم «۵»، و ادامه می دهیم. |
| ۸ | ۵ | ۵ بعلاوه ۸، ۱۳: نشانه می گذاریم و می نویسیم ۲. |
| | | رقم نهایی را که ۲ است به عنوان «مجموع فرعی»، زیر ستون می نویسیم. |

سپس تعداد نشانه‌هایی را که هنگام کاستن ۱۱ ها گذاشته‌ایم، می‌شماریم. در این مثال چند تا داشتیم؟ پنج تا. پس ۵ را زیر ستون به عنوان «رقم نشانه» می‌نویسیم. حالا مثال به شکل زیر در آمده است:

۳ ۶ ۸ ۹

۷ ۵ ۸

۹' ۶ ۶ ۷

۱ ۰ ۶ ۲

۶ ۲ ۹ ۸

۷ ۲ ۵

۹' ۹ ۶ ۸

۵' ۸ ۸ ۷

۹ ۹ ۸ ۸

۷' ۶ ۱ ۵

۸' ۷ ۴ ۹

۲: مجموعهای فرعی

۵: نشانه‌ها

جواب مورد نظر به کمک مجموعهای فرعی و عدد نشانه‌ها به دست می‌آید. اما ابتدا باید. همین کار را در ستونهای دیگر نیز انجام دهیم. نتیجه به صورت صفحه بعد خواهد بود:

$$\begin{array}{r}
 ۳ \ ۶ \ ۸ \ ۹ \\
 ۷' \ ۵' \ ۸' \\
 ۹' \ ۶ \ ۶ \ ۷' \\
 ۱ \ ۵ \ ۶' \ ۴ \\
 ۶ \ ۲' \ ۹' \ ۸' \\
 ۷ \ ۲ \ ۵ \\
 ۹' \ ۹' \ ۶' \ ۸' \\
 ۵' \ ۸' \ ۸ \ ۷' \\
 ۹ \ ۹' \ ۸' \ ۸ \\
 ۷' \ ۶ \ ۱ \ ۵' \\
 ۸' \ ۷' \ ۲ \ ۹'
 \end{array}$$

مجموعهای فرعی: ۲ ۳ ۱۵ ۱

نشانه‌ها: ۵ ۶ ۵ ۷

اکنون برای رسیدن به نتیجه نهایی، مجموعهای فرعی و نشانه‌ها را به این طریق جمع می‌کنیم: همسایه سمت راست واقع در ردیف پایینی را هم که مربوط به نشانه‌هاست، می‌افزاییم. مثلاً به این صورت:

$$\begin{array}{r}
 - \ ۳ \ - \ - \\
 - \ ۶ \ ۵ \ - \\
 \hline
 ۱۴ \quad ۵ \text{ بعلاوه } ۶ \text{ بعلاوه } ۳
 \end{array}$$

در این مثال داریم:

$$\begin{array}{r}
 ۰ \ ۲ \ ۳ \ ۱۵ \ ۱ \\
 ۰ \ ۵ \ ۶ \ ۵ \ ۷ \\
 \hline
 \end{array}$$

۱ بعلاوه ۷ می‌شود هشت

۱۰ بعلاوه ۵ بعلاوه ۷ می‌شود ۲۲

۳ بعلاوه ۶ بعلاوه ۵ بعلاوه بیست بر دو می‌شود ۱۶

۲ بعلاوه ۵ بعلاوه ۶ بعلاوه ده بر یک می‌شود ۱۴

صفر بعلاوه صفر بعلاوه ۵ بعلاوه ده بر یک می‌شود ۶

$$\begin{array}{r}
 ۸ \\
 ۰۰۲ \\
 ۰۶ \\
 ۰۴ \\
 ۶
 \end{array}$$

این نوع خاص از عمل جمع، یعنی افزودن همسایه سمت راست رقم پایینی، در این روش جنبه عمومی دارد و همیشه به کار خواهد رفت. اگر عملاً بخواهیم مثال بالا را حل کنیم، جواب به صورت زیر نوشته می شود:

(ستونهای ارقام)

$$\begin{array}{r} 0 \quad 2 \quad 3 \quad 10 \quad 1 \\ 0 \quad 5 \quad 6 \quad 5 \quad 7 \\ \hline 6 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad 2 \quad 8 \end{array}$$

برای جمع کردن این دو ردیف، مثل آنچه در جمع عادی انجام می گیرد، از منتهی الیه سمت راست شروع می کنیم. در آخرین مرحله، باید فرض کنیم دو صفر به صورت بالا، یکی بالای دیگری وجود دارند، مگر اینکه واقعاً آنها را نوشته باشیم. علت آن است که اینجا چیزی برای جمع کردن وجود دارد، یعنی رقم انتهایی سمت چپ در ردیف نشانه ها که در این مورد ۵ است. این وضع از آن رو پیش می آید که رقمها را نه به صورت عادی بلکه «به شکل L» جمع می زنیم. در آخرین مرحله به رقمهای زیر می رسم:

$$\begin{array}{r} 0 \\ 0 \quad 5 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 6 \end{array} \quad 5 \text{ بعلاوه ده بر یک می شود } 6$$

در همه موارد به همین شیوه عمل می شود.

یک میانبر ساده

برای آسانتر کردن این عمل جمع، توجه کنید که وقتی از «دستور کاستن یازده» استفاده می کنیم ضمن پایین آمدن در هر ستون هرگز به مجموعی بیشتر از ۱۹ نمی رسیم. پس هر وقت از ۱۱ بالاتر می رویم، اولین

رقم یا رقم سمت چپ حتماً ۱ است. پس برای «کاستن ۱۱» نیازی به انجام یک عمل کاهش واقعی نیست. کافی است نخستین رقم را نادیده بگیریم و از رقم دیگر یکی کم کنیم: اگر ۱۶ داریم، فقط ۶ را در ذهن می آوریم و آن را به ۵ کاهش می دهیم. پس ضمن گذاشتن نشانه، ۱۶ به ۵ تبدیل می شود. شاید این موضوع بدیهی به نظر برسد ولی چنین نیست. عملاً ضمن حل مسائل، نحوه در ذهن آوردن می تواند کار را دو برابر دشوارتر یا دو برابر آسانتر کند.

در مثال ساده و کوتاه زیر، اعدادی با دو رقم اعشاری را با یکدیگر جمع کنید:

$$\begin{array}{r} 9 \\ 8 \\ \hline 0 \end{array} /$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ \hline 0 \end{array} /$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 9 \\ \hline 0 \end{array} /$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array} /$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 3 \\ \hline 0 \end{array} /$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 2 \\ \hline 0 \end{array} /$$

با رسیدن به ۱۱ توقف

کنید و نشانه‌ای بگذارید!

یادتان مانده بود که موقع جمع کردن دو ردیف پایین، همسایه سمت راست پایینی را هم بیفزایید؟ اگر این کار را کرده باشید باید به جواب درست که ۳/۷۶ است رسیده باشید. برای روشن تر شدن موضوع، ردیفهای پایینی را می نویسیم که به صورت زیرند:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ \hline 1 \end{array} /$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ \hline 0 \end{array} /$$

و اگر هنگام جمع، رقمهای همسایه سمت راست پایینی در ردیف پایینی یعنی رقمهای ۵/۲۳ را نیز بیفزایید، حاصل جمع ۳/۷۶ می شود.

مثال ۱:

$$\begin{array}{r}
 ۵۴۷۷ \\
 ۹۶۶۵ \\
 ۲۷۴۶ \\
 ۸۳۵۶ \\
 ۷۲۹۹ \\
 ۵۱۶۲ \\
 ۶۸۷۵ \\
 \hline
 \text{مجموعه‌های فرعی:} \quad ۹۰۰۵۷ \\
 \text{نشانه‌ها:} \quad ۳۳۴۳ \\
 \hline
 \text{جمع کل:} \quad ۲۰۵۷۸۰
 \end{array}$$

مثال ۲:

$$\begin{array}{r}
 ۱۶ / ۳۹ \\
 ۵۰۷ / ۲۶ \\
 ۱۹۵ / ۰۰ \\
 ۷۸ / ۳۷ \\
 ۶۲ / ۲۷ \\
 ۲ / ۷۵ \\
 ۸۸ / ۴۷ \\
 ۲۸۶ / ۵۵ \\
 \hline
 \text{مجموعه‌های فرعی:} \quad ۸۶۴ / ۲۲ \\
 \text{نشانه‌ها:} \quad ۰۳۴ / ۲۲ \\
 \hline
 \text{جمع کل:} \quad ۱۰۲۰۴۰۱ / ۰۰۶
 \end{array}$$

چند مسئله برای تمرین عرضه می‌کنیم که جوابهای درست نیز به دنبال

آنها داده شده است. شما هم براحتی می توانید مسائل مشابهی برای خودتان مطرح کنید:

مسئله ۱:	مسئله ۲:	
۴۶۹	۶۱۵۹۸	
۷۴۲	۵۰۴۲۳	
۳۲۵	۷۲۴۶	
۹۶۲	۷۴۴	
۵۲۷	۴۲	
۶۲۳	۹۳۵۷	
۲۱۳	۲۱	

مسئله ۳:	مسئله ۴:	
۱/۲۵	۱۶۶/۱۵	
۳/۵۶	۳۵/۹۴	
۷/۵۸	۳۴/۱۳	
۵/۹۸	۷۰۵/۷۵	
۳۸/۵۰	۴۲۲/۵۰	
۵۹/۵۰	۲/۹۹	
۹/۷۵	۱۶/۷۷	
۲/۹۸	۵۲۲/۳۵	
۱۲/۲۵	۸۷۵/۸۸	
۱۴/۸۵	۲۷/۶۶	
۴۵/۵۰	۵۵/۱۸	
۲۵/۷۵	۱۴۹/۷۵	

جوابهای زیر از به کار بردن عمل جمع به صورت L برای مجموعه‌های فرعی رقمهای کاهش یافته و اعداد نشانه مذکور به دست آمده‌اند:

$$\begin{array}{r} (۱) \quad ۰۳۱۹ \\ \quad ۰۳۲۲ \\ \hline \quad ۳۸۶۱ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (۲) \quad ۵۵۶۱۵۸۹ \\ \quad ۵۱۱۱۲۲ \\ \hline \quad ۱۲۹۴۳۱ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (۳) \quad ۵۵۰۴۰ \\ \quad ۵۱۵۵۵ \\ \hline \quad ۲۲۱۴۵ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (۴) \quad ۵۴۲۳۹۱۵ \\ \quad ۵۲۳۵۵۵ \\ \hline \quad ۳۰۵۱۵۵۵ \end{array}$$

نکته مهم. گاه کسانی دیگر روشی مشابه «دستور کاهش یازده» را که در بالا گفته شد به کار برده اند. آنها هر بار که مجموع فرعی از ۱۵ بیشتر شود ۱۵ تا از آن کاسته و نشانه‌ای گذاشته اند. البته این هم به نوبه خود تدبیر خوبی است. ولی ما همان «دستور کاهش یازده» را ترجیح می دهیم زیرا کارایی بیشتری دارد و به کمک آن می توانیم یک امتحان ویژه و امتحان دوباره که در ادامه این فصل بیان می شود، انجام دهیم.

امتحان کردن جواب

برای آنکه کارهای انجام شده را در چند کلمه خلاصه کنیم، بد نیست نگاه دوباره‌ای به یکی از مثالها بیندازیم، اما اکنون اغلب رقمها را با نقطه نشان داده ایم:

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{r} ۳۶۸۹ \\ ۰۰۰۰ \\ ۰۰۰۰ \\ ۸۷۴۹ \\ \hline ۲۳۱۵۱ \\ ۵۶۵۷ \\ \hline ۶۴۶۲۸ \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{مستون عدد ها} \\ \text{ردیف های همل} \\ \text{جواب} \end{array} \end{array}$$

در بیانی خلاصه، از ستون عددها برای تشکیل ردیفهای عمل و از ردیفهای عمل برای پیدا کردن جواب استفاده کردیم. ردیفهای عمل چنانکه می بینید شامل مجموعههای فرعی و اعداد نشانه است که در همه مثالها آنها را به کار برده ایم.

اکنون برای امتحان کردن عمل از این سه چیز استفاده می کنیم: ستون عددها، ردیفهای عمل، و جواب. از هر کدام اینها یک میزان (عدد امتحان) به دست می آوریم و این میزانها را با یکدیگر مقایسه می کنیم تا معلوم شود با یکدیگر تطبیق می کنند یا نه. اگر تطبیق کردند، عمل درست است. در غیر این صورت یک جای کار غلط است. با این روش امتحان کردن می توانیم بفهمیم «کجا»ی کار غلط بوده است. در این امتحان، بدون تکرار عمل جمع می توانیم معلوم کنیم کدام یک از ستونهای ارقام غلط جمع شده است.

چون سه چیز را باید امتحان کنیم، عمل امتحان شامل سه مرحله است. ابتدا هر یک از این سه مرحله را بیان می کنیم، سپس هر یک از آنها را بتفصیل در مورد مثال بالا انجام می دهیم:

مرحله اول: برای هر یک از ستونهای ارقام، یک میزان پیدا می کنیم.

مرحله دوم: برای ردیفهای عمل، یک میزان پیدا می کنیم.

مرحله سوم: برای جواب (یا جمع کل) هم یک میزان پیدا می کنیم.

مرحله اول: برای یکایک ستونها باقیمانده تقسیم بر ۹ را محاسبه می کنیم. این همان مجموع ارقام تقلیل یافته است که در فصل دوم، در بخش امتحان کردن جواب بیان شد. برای یافتن باقیمانده تقسیم بر ۹، زیر یا روی همه ۹ ها و همه ترکیبهایی از ارقام که مجموعشان ۹ یا مضربی از ۹ است خط می کشیم؛ سپس فقط رقمهای باقیمانده را با

یکدیگر جمع می‌کنیم. این مجموع اغلب عددی دو رقمی در می‌آید. در این صورت، آن را با جمع کردن دو رقمش به عدد یک رقمی تبدیل می‌کنیم. عدد یک رقمی به دست آمده، میزان آن ستون ارقام است. مثلاً میزان را برای ستون سمت چپ ارقام در یکی از مثالهای قبلی به این صورت به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r}
 \cancel{8}689 \\
 758 \\
 \cancel{8}667 \\
 \cancel{8}064 \\
 \cancel{8}498 \\
 745 \\
 \cancel{8}968 \\
 5887 \\
 \cancel{8}988 \\
 7615 \\
 \cancel{8}749 \\
 \hline
 12 \\
 3
 \end{array}$$

افزون بر ۹های موجود در ستون اول، رقمهای ۳ و ۶ را هم خط زده‌ایم زیرا مجموعشان ۹ است. به همین ترتیب رقمهای ۱ و ۸ را نیز خط زده‌ایم. رقمهای باقیمانده را جمع می‌کنیم: ۵ بعلاوه ۷ می‌شود ۱۲. برای آنکه از این عدد در امتحان کردن استفاده کنیم دو رقمش را با هم جمع می‌کنیم تا عددی یک رقمی حاصل شود. در این کار داریم ۱ بعلاوه ۲ می‌شود ۳. پس تا اینجا میزان فرعی برای ستون اول ۳ است. همین کار را برای سه ستون دیگر هم انجام می‌دهیم. اگر جایی دیدیم که مجموع سه رقم در یک ستون ۹ می‌شود، هر سه تایی آنها را

خط می‌زنیم. اما اگر هم متوجه وجود چنین مجموعه‌ای از سه رقم نشدیم، اشکالی پیش نخواهد آمد. در واقع هر طور عمل کنیم نهایتاً به همان عدد یک رقمی خواهیم رسید که از جمع کردن ۱ و ۲ به دست آوردیم و در این میان اهمیتی ندارد که چه موقعیتهایی برای خط زدن رقمها را از دست داده‌ایم. جمع کردن رقمهای مجموع به دست آمده، از دست رفتن موقعیتهای را جبران می‌کند و تنها چیزی که از دست می‌رود مقدار اندکی انرژی ذهنی است.

بد نیست خودتان این کار را برای سه ستون دیگر انجام دهید. در پایان کار نتیجه باید به صورت زیر باشد. اکنون به جای خط زدن رقمها، زیرشان خط کشیده‌ایم:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 ۳ & ۶ & ۸ & ۹ \\
 & ۷' & ۵' & ۸' \\
 ۹' & ۶ & ۶ & ۷' \\
 ۱ & ۵ & ۶' & ۴ \\
 ۶ & ۲' & ۹' & ۸' \\
 & ۷ & ۴ & ۵ \\
 ۹' & ۹' & ۶' & ۸' \\
 ۵' & ۸' & ۸ & ۷' \\
 ۹ & ۹' & ۸' & ۸ \\
 ۷' & ۶ & ۱ & ۵' \\
 ۸' & ۷' & ۴ & ۹'
 \end{array}
 \end{array}$$

مجموعهای فرعی:

$$\begin{array}{cccc}
 ۲ & ۳ & ۱۵ & ۱
 \end{array}$$

نشانه‌ها:

$$\begin{array}{cccc}
 ۵ & ۶ & ۵ & ۷
 \end{array}$$

جمع کل:

$$\begin{array}{cccc}
 ۴ & ۶ & ۲ & ۸
 \end{array}$$

امتحان:

باقیمانده‌های تقسیم بر نه

$$\begin{array}{cccc}
 ۳ & ۶ & ۲ & ۶
 \end{array}$$

در این کار لزومی ندارد که تبدیل به عدد یک رقمی را به پایان کار موکول کنیم. بهتر است این کار ضمن عمل صورت بگیرد (در ستونهای دوم و سوم از سمت چپ، می بینید که مجموع سه رقم ۶ کنار گذاشته شده، ۱۸ یعنی مضربی از ۹ است. در ستون دوم از سمت چپ، در صورت تمایل می توانید رقمهایی را که زیرشان خطی کشیده نشده با هم جمع کنید تا به عدد ۳۳ برسید سپس این ۳۳ را چنانکه در عمل هم نشان داده شده به ۶ تبدیل کنید. اما بهتر است این کار را در ضمن عمل انجام دهید زیرا این شیوه آسانتر است. اگر ستون را از بالا به پایین بپیماییم و ارقامی را که زیرشان خط کشیده شده نادیده بگیریم، داریم ۷ بعلاوه ۴، ۱۱، «می شود ۲» (زیرا ۱ بعلاوه ۱ می شود ۲)، بعلاوه ۷ می شود ۹، بعلاوه ۸، ۱۷، «می شود ۸» (زیرا ۱ بعلاوه ۷ می شود ۸)، بعلاوه ۷، ۱۵، «می شود ۶» (زیرا ۱ بعلاوه ۵ می شود ۶). این ۶ همان میزان است و البته با آنچه قبلاً یافته ایم مطابقت دارد. نکته صرفاً در این است که اگر ضمن کار مجموعها را کاهش دهیم (به جای آنکه تا ۳۳ جمع کنیم و سپس ۳۳ را به ۶ تبدیل کنیم) کار کردن با عددهای کوچکتر راحت تر خواهد بود. قدری بعدتر دوباره به این موضوع بر می گردیم.

مرحله دوم: در این مرحله می خواهیم ردیفهای عمل را که در مثال ما به صورت زیر بود، بررسی کنیم:

مجموعهای فرعی: ۲ ۳ ۱۵ ۱
نشانه ها: ۵ ۶ ۵ ۷

برای یافتن میزانهای این قسمت، ردیف دوم را مجدداً می نویسیم، سپس جمع می کنیم:

مجموعه‌های فرعی :	۲	۳	۱۵	۱
نشانه‌ها :	۵	۶	۵	۷
نشانه‌های مجدد :	۵	۶	۵	۷
حاصل جمع کردن :	۱۲	۱۵	۲۰	۱۵
تبدیل به اعداد یک رقمی :	۳	۶	۲	۶

رقمهای اخیر را با آنچه در مرحله اول یافته‌ایم مقایسه می‌کنیم. در آنجا چهار رقم ۶ و ۲ و ۶ و ۳ را به ازای چهار ستون عمل جمع به دست آوردیم. در مرحله دوم هم عیناً همان چهار رقم ۶ و ۲ و ۶ و ۳ را یافته‌ایم. این میزانها با میزانهای یافته شده در مرحله اول کاملاً مطابقت دارد، پس عمل درست بوده است.

فرض کنید که در موردی این دو مجموعه ارقام با هم مطابقت نداشته باشند. مثلاً فرض کنید که در مرحله اول رقمهای ۶ و ۷ و ۶ و ۳ و در مرحله دوم ۶ و ۲ و ۶ و ۳ به دست آید. در سومین رقم از سمت چپ، اختلاف وجود دارد. پس معلوم می‌شود که سومین ستون از سمت چپ غلط جمع شده است، ولی سه ستون دیگر درست‌اند. برای پیدا کردن اشتباه فقط ستون سوم بررسی می‌شود.

مرحله سوم: در یک مرحله رقمی به عنوان میزان از جواب به دست می‌آید. در مثال بالا، جواب یا جمع کل ۶۴۶۲۸ بود. میزان عبارت است از مجموع ارقام آن: ۶ بعلاوه ۴ بعلاوه ۶ بعلاوه ۲ بعلاوه ۸ می‌شود ۲۶، که تبدیل به ۸ می‌شود.

برای امتحان عمل، این میزان را با چه باید مقایسه کنیم؟ آن را با دو مجموعه اعداد یک رقمی که در مراحل اول و دوم یافتیم مقایسه می‌کنیم: رقمهای ۶ و ۲ و ۶ و ۳. مجموع این ارقام ۱۷ است که به ۸ تبدیل می‌شود. مجموع ارقام تقلیل یافته برای جمع کل هم که ۶۴۶۲۸ در آمده است، ۸ می‌شود. چون هر دو نتیجه ۸ شده و یکسان است پس عمل جمع درست صورت گرفته است.

این شیوه کار را برای هر عمل جمعی می‌توانیم به کار ببریم. البته عملاً لزومی ندارد که همهٔ رقم‌هایی را که در توضیح وارد شدند بنویسیم. بخصوص در امتحان کردن ردیف‌های عمل نیازی به نوشتن مجدد این ردیف‌ها و تکرار ردیف پایینی نیست. تکرار ردیف پایینی را می‌توانیم به طور ذهنی انجام دهیم. برای این کار کافی است رقم پایینی دوبار افزوده شود. به این ترتیب مثالی که برای توضیح چگونگی این روش بیان شد عملاً به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} 3 \\ \hline 7' \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ \hline 5' \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \hline 8' \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ \hline 8' \end{array} \\
 \begin{array}{r} 9' \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ \hline 6' \end{array} \quad \begin{array}{r} 7' \\ \hline 4 \end{array} \\
 \begin{array}{r} 6 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3' \\ \hline 9' \end{array} \quad \begin{array}{r} 9' \\ \hline 8' \end{array} \quad \begin{array}{r} 8' \\ \hline 8' \end{array} \\
 \begin{array}{r} 7 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \hline 8' \end{array} \quad \begin{array}{r} 8' \\ \hline 8' \end{array} \\
 \begin{array}{r} 5' \\ \hline 8' \end{array} \quad \begin{array}{r} 8' \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \hline 7' \end{array} \quad \begin{array}{r} 7' \\ \hline 8 \end{array} \\
 \begin{array}{r} 9 \\ \hline 7' \end{array} \quad \begin{array}{r} 9' \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8' \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \hline 5' \end{array} \\
 \begin{array}{r} 7' \\ \hline 8' \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ \hline 7' \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5' \\ \hline 9' \end{array}
 \end{array}$$

مجموعه‌های فرعی : $2 \quad 3 \quad 10 \quad 1$

نشانه‌ها : $5 \quad 6 \quad 5 \quad 7$

جمع کل : $6 \quad 2 \quad 6 \quad 2 \quad 8$

امتحان عمل:

(باقیمانده‌های تقسیم بر نه) : $3 \quad 6 \quad 2 \quad 6$ ستونها

ردیف‌های عمل : $3 \quad 6 \quad 2 \quad 6 = 8$

جواب : $6 \quad 4 \quad 6 \quad 2 \quad 8 = 8$

در موارد عملی علاوه بر این، همه کلمات را هم حذف می کنیم و تنها رقمها را می نویسیم. وقتی خودمان عمل جمع را انجام می دهیم متوجه هستیم که ردیف ۱ و ۱۰ و ۳ و ۲ مربوط به مجموعهای فرعی است، تا آخر. در اینجا فقط برای آنکه اشکالی در درک موضوع پیش نیاید اسم هر ردیف را جلوش نوشته ایم.

اکنون مثال دیگری می آوریم که نحوه نوشتن آن قدری متفاوت است و احياناً آن را راحت تر خواهید یافت. تفاوت موجود این است که ردیف نشانه ها از ردیفهای عمل دوبار نوشته شده ولی ردیف دیگر آن مجدداً نوشته نشده است. ردیف نشانه ها را بار دوم زیر جواب نوشته ایم. به این ترتیب برای جمع کردن اعداد ردیفهای عمل که ردیف دیگری هم به آن افزوده شده، باید از روی جواب رد شویم:

$$\begin{array}{r} 9 \\ 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3' \\ 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 9' \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4' \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 3' \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5' \\ 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{مجموعهای فرعی: } \begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\text{نشانه ها: } \begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{جواب } 3/76 \text{ است: } \begin{array}{r} 6 \\ 7 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\text{تکرار ردیف نشانه ها: } \begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{رقمهای امتحان: } \begin{array}{r} 9 \\ 6 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\text{میزان ستونها (باقیمانده تقسیم بر نه): } \begin{array}{r} 0 \\ 6 \\ \hline 1 \end{array}$$

معلوم می شود که عمل درست بوده است. در محاسبه میزان، ۹ و صفر هم ارزند. عدد $۱/۶۹$ از جمع کردن سه عدد به طور عمودی به دست آمد: ۱ بعلاوه صفر بعلاوه صفر شد ۱؛ ۲ بعلاوه ۲ بعلاوه ۲ شد ۶؛ ۳ بعلاوه ۳ بعلاوه ۳ شد ۹.

قسمت آخر امتحان: جواب را که $۳/۷۶$ است با یافتن مجموع ارقام تقلیل یافته آن، امتحان می کنیم. این عدد ۷ در می آید. مجموع ارقام $۱/۶۹$ هم ۷ است، پس اینجا هم امتحان درست در آمد. بنابراین اشتباهی در کار نبوده است.

روش کلی برای امتحان کردن

در همه انواع محاسبه، داشتن روشی برای امتحان کردن عمل بدون تکرار آن، موضوع مهمی است. برای هر محاسبه ای اعم از جمع، تفریق، تقسیم، مجذور کردن، جذر گرفتن یا هر ترکیبی از این اعمال، به روش مناسبی برای امتحان کردن نیاز داریم. چنین روشی وجود دارد و در همه انواع محاسبه کارایی دارد. در واقع دو روش برای این منظور وجود دارد که تفاوت اندکی با یکدیگر دارند و برای کامل بودن موضوع، هر دوی آنها را بیان می کنیم. ابتدا روش مجموع ارقام را، به عنوان روش اصلی، شرح می دهیم. سپس روش «طرح یازده ها» را به عنوان روش دوم یا روش اختیاری عرضه می کنیم.

روش مجموع ارقام

این روش که آن را به نام روش طرح نه نه نیز می خوانند، از قدیم وجود داشته و در روش تراختنبرگ پذیرفته شده است. این روش را در بخشی از امتحان عمل جمع دیدید. لابد به خاطر دارید که روش مجموع ارقام شامل مراحل زیر بود:

۱. مجموع ارقام هر عدد را با «جمع زدن ارقام» آن پیدا می کنیم.

مثلاً، مجموع ارقام عدد ۵۰۱۲ عبارت است از ۵ بعلاوه ۰ بعلاوه ۱ بعلاوه ۲ که می شود ۸.

۲. همیشه نتیجه را به عدد یک رقمی تبدیل می کنیم، مگر آنکه خودش یک رقمی باشد. مثلاً مجموع ارقام ۵۰۱۲۴۳۱ می شود ۵ بعلاوه ۵ بعلاوه ۱ بعلاوه ۲ بعلاوه ۴ بعلاوه ۳ بعلاوه ۱ که می شود ۷ (که مجموع ارقام ۱ و ۶ در ۱۶ است).

۳. در جمع زدن رقمهای هر عدد، ۹ها را کنار می گذاریم. در واقع اگر هم متوجه دو رقم شویم که مجموعشان ۹ است، مثل ۱ و ۸، هر دوی آنها را نادیده می گیریم. پس مجموع ارقام ۹۰۵۹۹۹۹۱ در یک نگاه ۱ است. دیگر لازم نیست ۹ها را هم در جمع وارد کنیم. (اما اگر هم وارد کردیم، نهایتاً باز هم پس از تبدیل به عدد یک رقمی به همان ۱ می رسیم. اگر باور ندارید، امتحان کنید!)

۴. چون در این روش، چنانکه در بالا دیدیم، «نه ها به حساب نمی آیند»، مجموع ارقام ۹ همان مجموع ارقام صفر است. مثلاً مجموع ارقام ۵۱۳ صفر است. به خاطر داشتن این موضوع در برخی موارد باعث صرفه جویی در کار می شود.

برای مثال، بگویید که مجموع ارقام ۹۱۸۲۷۳۶۴۵ چند است؟ قاعدتاً باید بدون فکر زیاد، ظرف حدود سه ثانیه جواب بدهید. نتیجه صفر است. علت آن است که ۹ها را نادیده می گیریم؛ پس جفت رقمهایی را هم که مجموعشان ۹ است نادیده می گیریم و در این مثال هر جفت عدد مجاور بعد از اولین ۹، مجموعشان ۹ است. همه چیز کنار گذاشته می شود و نهایتاً به صفر می رسیم.

مجموع ارقام ۲۳۴۱۶۲ چند است؟ (راهنمایی: هر سه رقمی را که مجموعشان ۹ است، کنار می گذاریم.) باز هم به صفر می رسیم.

البته معمولاً عددی که با آن سرو کار داریم شامل رقمهایی هم هست که مجموعشان ۹ نمی شود. حاصل جمع آنها هر قدر بشود، مجموع ارقام همان است، البته پس از آنکه به صورت یک رقمی در آید.

پس مجموع ارقام ۹۵۳۶۱۷ می شود ۸. رقم ۹ و رقم صفر را کنار می گذاریم، ۳ بعلاوه ۶ می شود ۹، باقی می ماند ۱ و ۷ که مجموعشان ۸ می شود.

صرفه جویی در کار: ضمن «جمع زدن» رقمهای یک عدد، هرگاه مجموع فرعی دو رقمی شد، این دو رقم را با هم جمع می کنیم، و با این عدد یک رقمی به عنوان مجموع فرعی جدید، کار را ادامه می دهیم.

مثلاً می خواهیم مجموع ارقام ۷۲۸۸۴۷۶۵۶۸ را پیدا کنیم. می گوئیم ۷ بعلاوه ۲ می شود ۹؛ آن را نادیده می گیریم. سپس ۸ بعلاوه ۸ می شود ۱۶ که عددی دو رقمی است. این ۱۶ را به یک رقم تبدیل می کنیم: ۱ بعلاوه ۶ می شود ۷. با این ۷ کار را ادامه می دهیم: ۷ بعلاوه ۴ می شود ۱۱، که دو رقمی است، پس آن را به یک رقم تبدیل می کنیم، ۱ بعلاوه ۱ می شود ۲. کار را با ۲ دنبال می کنیم: ۲ بعلاوه ۷ می شود ۹، «می شود صفر»، و به سراغ رقمهای بعدی می رویم. اکنون ۶ بعلاوه ۵ می شود ۱۱، «می شود ۲» و ۲ بعلاوه ۶ می شود ۸. سپس ۸ بعلاوه ۸ می شود ۱۶، «می شود ۷». پس مجموع ارقام این عدد طولانی ۷ است.

در مورد اعداد شامل کسر اعشاری هم عیناً به همین صورت عمل می شود. کافی است وجود ممیز را نادیده بگیریم. مثلاً، مجموع ارقام $5/111$ برابر با ۸ است.

توضیح: گرچه از لحاظ عملی ضرورتی ندارد که بدانیم چرا این روش قابل استفاده است، ولی احتمالاً توضیح آن برایتان جالب خواهد بود. نکته اصلی این است: اعدادی که محاسبه می کنیم، و آنها را مجموع ارقام می نامیم، دقیقاً باقیمانده هایی هستند که از تقسیم هر عدد بر ۹ به دست می آیند. مثلاً ۳۲ را در نظر بگیرید. آن را بر ۹ تقسیم می کنیم: ۹ ضرب در ۳ می شود ۲۷ و باقیمانده ۵ خواهد بود. عدد طولانیتری می گیریم، مثلاً ۲۸۱، و آن را بر ۹ تقسیم می کنیم؛ خارج قسمت ۳۱ می شود و باقیمانده ۲ در می آید. اما همان طور که لابد توجه کرده اید،

در مورد اول مجموع ارقام ۳۲ می شود ۵ که با باقیمانده ۵ برابر است، و در مورد دوم مجموع ارقام ۲۸۱ می شود ۱۱، که به ۲ تبدیل می شود. در هر موردی، مجموع ارقام پس از تبدیل به یک رقم، با باقیمانده تقسیم بر نه برابر خواهد بود.

کاربرد مجموع ارقام در امتحان کردن محاسبات

حالا از این مجموع ارقام چگونه در امتحان کردن محاسبات استفاده کنیم؟ ظاهراً در موارد مختلف به شیوه های مختلفی عمل می شود، ولی در واقع کافی است یک اصل اساسی را به خاطر بسپاریم:

دستور اساسی: هر کاری که با اعداد می کنیم، همان کار را هم با مجموع ارقام آنها می کنیم؛ در این صورت نتیجه ای که از این مجموعه های ارقام عددها به دست می آید باید با مجموع ارقام جواب برابر باشد.

به عنوان مثال: فرض کنید با عمل ضرب سرو کار داریم و عدد ۹۲ را در ۱۲ ضرب می کنیم. حاصل ضرب ۱۱۰۴ است. می توانیم ردیفهای موازی چنین بنویسیم:

$$\begin{array}{rcll} & & \times & 12 & = & 1104 & \text{عددها} \\ & & \times & 2 & = & 184 & \\ \text{مجموعه های ارقام:} & 2 & \times & 3 & = & 6 & \end{array}$$

$$(1+1) \times (1+2) \quad (1+1+0+4)$$

مجموع ارقام ۲ از عدد ۹۲ به دست آمده که به ازای آن داریم ۹ بعلاوه ۲ می شود ۱۱. آن را به یک رقم تبدیل می کنیم: ۱ بعلاوه ۱ می شود ۲ (یا کافی است ۹ را نادیده بگیریم). موضوع اصلی این است که رقم ۶ را در

طرف راست از دو راه به دست می آوریم یک راه آن از طرف چپ تساوی است: ۲ ضرب در ۳ می شود ۶. راه دیگر از جواب، یعنی ۱۱۰۴ است: ۱ بعلاوه ۱ بعلاوه صفر بعلاوه ۴ می شود ۶. طبعاً می گوئیم ۶ با ۶ برابر است و امتحان، جواب مثبت داده. به عبارت دیگر، نتیجه ۱۱۰۴ درست است.

این روش را به همین صورت می توانیم در جمع هم به کار گیریم:

$$۱۵ + ۱۲ + ۲۰ = ۴۷$$

$$۶ + ۳ + ۲ = ۱۱ \quad (۴+۷=۱۱)$$

$$۲ = ۲ \quad \text{که تبدیل می شود به}$$

در مثال اول دو عدد ۹۲ و ۱۲ در یکدیگر ضرب می شدند، بنابراین مجموعهای ارقام ۲ و ۳ را در یکدیگر ضرب کردیم. در مثال دوم وضع فرق می کرد. در اینجا سه عدد مفروض ۱۵ و ۱۲ و ۲۰ را جمع می کردیم، پس مجموعهای ارقام آنها را هم که ۶ و ۳ و ۲ بودند جمع کردیم. برای این کار همیشه یک محاسبه موازی انجام می دهیم که در آن به جای خود اعداد مجموع ارقام آنها گذاشته شده است.

البته، اعداد مفروض اغلب خیلی بزرگند. و گاه سر به چند میلیون می زنند. اما مجموع ارقام آنها همیشه کوچک است و در واقع به یک رقم تبدیل می شود. در نتیجه، برای انجام این امتحان مقدار محاسبه کمی لازم است و از این راه ابزار با ارزشی برای بررسی اعمال خواهیم داشت.

ضرب دو گانه زیر را امتحان کنید:

$$۳۲۲ \times ۲۸ / ۱ \times ۱۲ / ۴ = ۱۱۲۱۹۷ / ۶۸$$

ممیزها را در امتحان کردن نادیده می گیریم. در سمت چپ علامت تساوی، مجموعهای ارقام زیر را داریم:

۷ × ۲ × ۷

(۱۲)

(۵ × ۷)

(۳۵)

۸

ذهنی انجام دهید - ننویسید

ذهنی انجام دهید - ننویسید

باز هم ذهنی!

مجموع ارقام

در طرف راست تساوی، جواب را داریم که $۱۱۲۱۹۷/۶۸$ است. مجموع ارقام این عدد با جمع کردن رقمهایش ۸ به دست می آید. پس ۸ با ۸ برابر و عمل درست بوده است.

در موارد ساده‌ای، این خاصیت برای تقسیم هم وجود دارد. مثلاً، در مثال زیر:

$$۱۳۲ \div ۱۱ = ۱۲ \quad \text{عددها}$$

$$۶ \div ۲ = ۳ \quad \text{مجموعهای ارقام}$$

یعنی مجموع ارقام جواب ۳ است (۱ بعلاوه ۲) و از تقسیم ۶ بر ۲ هم ۳ حاصل می شود. بنابراین نتیجه امتحان مثبت است.

اما در اغلب موارد، کار در مورد تقسیم قدری پیچیده تر است زیرا اغلب تقسیمها «باقیمانده دارند». در این مورد، بعداً در فصل مربوط به تقسیم توضیح خواهیم داد. فعلاً کافی است به این نکته توجه کنید که:

برای امتحان عمل تقسیم می توانیم مجموعهای ارقام مناسب را در همدیگر ضرب کنیم.

مثلاً در مثال بالا، می توانیم مجموع ارقام خارج قسمت را در مجموع ارقام مقسوم علیه ضرب کنیم یعنی ۳ ضرب در ۲ که می شود ۶. مجموع ارقام مقسوم هم ۶ است پس نتیجه امتحان عمل، مثبت است.

روش طرح یازده‌ها

به جای استفاده از روش مجموع ارقام می‌توانیم این روش را به کار ببریم. این روش را در صورت تمایل می‌توانیم به عنوان امتحان دوگانه یا صرفاً به خاطر تنوع به کار ببریم. در این روش باقیمانده‌های تقسیم بر یازده مطرح می‌شود. ولی در اینجا چیزی را بر ۱۱ تقسیم نمی‌کنیم. درست همان طور که مجموع ارقام همان باقیمانده‌ای است که در صورت تقسیم کردن بر ۹ به دست می‌آید، اکنون باقیمانده‌ای را پیدا می‌کنیم که در صورت تقسیم کردن بر ۱۱ حاصل می‌شود و خواهیم دید که تا حدی شبیه مجموع ارقام است. روش به صورت زیر است:

حالت اول: اعداد دو رقمی

برای یافتن باقیمانده طرح یازده‌ها در عددهای دو رقمی، مثل ۴۸، رقم دهگان را از رقم یکان کم می‌کنیم: در مورد ۴۸ داریم، ۸ منهای ۴ می‌شود ۴. باقیمانده طرح یازده‌ها برای ۴۸، عدد ۴ است. اگر هم واقعاً ۴۸ را بر ۱۱ تقسیم می‌کردیم، همین عدد حاصل می‌شد.

گاه رقم دهگان از رقم یکان بزرگتر است، در نتیجه این کاهش ممکن نیست، مثلاً وقتی عدد ۸۶ را داریم. در این حالت، رقم یکان را با افزودن ۱۱ به آن، به اندازه کافی بزرگ می‌کنیم. در مورد ۸۶ داریم ۶ بعلاوه ۱۱ می‌شود ۱۷، منهای ۸ می‌شود ۹. در مورد ۵۲ باقیمانده طرح یازده‌ها ۲ منهای ۵ خواهد بود؛ می‌گوییم ۲ بعلاوه ۱۱ منهای ۵ می‌شود ۸.

حالت دوم: اعداد با بیش از دو رقم

در اینجا شیوه کار یک در میان گرفتن رقم‌هاست. به عبارت دیگر، از

آخرین عدد سمت راست شروع می کنیم و به سمت چپ رقمها را یک در میان جمع می زنیم، سپس رقمهایی را که از رویشان رد شده ایم جمع می زنیم و دو مجموع از همدیگر تفریق می کنیم. عدد ۹۴۳۰۲۱۷۵۸ را در نظر بگیرید. از آخرین عدد سمت راست، یعنی ۸ شروع می کنیم و به سمت چپ رقمها را یک در میان جمع می زنیم:

$$۸ + ۷ + ۲ + ۳ + ۹ = ۲۹$$

سپس به عدد ما قبل آخر بر می گردیم یعنی رقم ۵ از عدد مفروض و دوباره رقمها را یک در میان به یکدیگر می افزاییم:

$$۵ + ۱ + ۰ + ۴ = ۱۰$$

حالا تفریق را انجام می دهیم:

$$۲۹ - ۱۰ = ۱۹$$

این ۱۹ هم باید تقلیل پیدا کند، همان طور که قبلاً مجموعهای ارقام را برای تبدیل کردن به یک رقم، تقلیل می دادیم. در این روش برای تقلیل دادن آن، رقم دهگان را از رقم یکان کم می کنیم:

$$۹ - ۱ = ۸$$

در این مثال ۱۰ را از ۲۹ کم کردیم. فرض کنید در حالت دیگری مثلاً به ۲۹ منهای ۳۵ برسیم که این تفریق امکانپذیر نیست؛ در این صورت چه باید کرد؟ به عدد کوچکتر ۱۱ را می افزاییم تا به اندازه کافی زیاد شود که بتوانیم تفریق را انجام دهیم؛ در اینجا ۲۹ منهای ۳۵ می شود ۴۰ منهای ۳۵ که برابر با ۵ است.

آیا این ۲۹ و ۳۵ اعداد بزرگی اند و کار کردن با آنها دشوار است؟ البته برای حل این مشکل راههای میانبری وجود دارد. یکی از این راهها شبیه همان شیوه ای است که قبلاً به کار می بستیم: پس از آنکه نخستین عدد را یافتیم و مثلاً همان ۲۹ درآمد، آن را کنار نمی گذاریم که به سراغ پیدا کردن ۳۵ برویم. به جای این کار، شروع می کنیم به کم کردن از ۲۹، یا هر عدد دیگری که هست. یعنی، پس از آنکه مجموع رقمها را یک در میان به دست آوردیم، به رقم ما قبل آخر باز می گردیم

و آن را از مجموع کم می کنیم. این کار را به طرف چپ در طول عدد ادامه می دهیم و رقمها را یک در میان از این نقطه شروع جدید، تفریق می کنیم. (اینها همان رقمهایی اند که برای رسیدن به نخستین مجموع از رویشان رد شدیم.) در واقع این کار به منزله آن است که مجموع دوم را خرده خرده تفریق کنیم. مثلاً عدد ۲۳۶۸۵۹۴ را در نظر بگیرید. از انتهای عدد، با رقم ۴ شروع می کنیم و رقمهایی را که زیرشان خط کشیده شده، جمع می زنیم:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3 \quad 6 \quad 8 \quad 5 \quad 9 \quad 4 \\ \hline \end{array}$$

پس ۴ بعلاوه صفر می شود ۴، بعلاوه ۶ می شود ۱۰، بعلاوه ۵ می شود ۱۵. حالا دوباره برمی گردیم و رقمهای دیگر را به کار می بریم،

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3 \quad 6 \quad 8 \quad 5 \quad 9 \quad 4 \\ \hline \end{array}$$

و آنها را یکی یکی از عدد ۱۲ که در بالا به دست آمد کم می کنیم: ۱۲ منهای ۹ می شود ۳؛ اما اکنون ۸ را نمی توانیم تفریق کنیم زیرا از ۳ بزرگتر است، پس ۱۱ تا به ۳ می افزاییم و می گوئیم: ۳ بعلاوه ۱۱ می شود ۱۴، منهای ۸ می شود ۶، منهای ۳ می شود ۳. باقیمانده طرح یازده ها ۳ است. در صورت تمایل می توانستیم بعد از رسیدن به مجموع ۱۲، به عقب برگردیم و رقمهای دیگر را از چپ به راست تفریق کنیم: ۱۲ منهای ۳ می شود ۹، منهای ۸ می شود ۱؛ حالا ۱ بعلاوه ۱۱ می شود ۱۲؛ و ۱۲ منهای ۹ می شود ۳. باقیمانده طرح یازده ها برای این عدد، بی توجه به نوع میانبری که به کار رود، همیشه ۳ در می آید.

یک میانبر دیگر که کارایی زیادی دارد، به کار گیری جفت رقمهای مجاور در طول عدد است. در هر جفت یکی از رقمها را از دیگری کم می کنیم زیرا یکی از آنها رقم «زوج» و دیگری رقم «فرد» است (البته، از لحاظ ترتیب قرار گرفتن). مثلاً عدد ۴۶۹۳۲۶۵۸۱۷ را در نظر می گیریم. عدد را یک بار می نویسیم و رقمهایش را جفت جفت با کشیدن خطی زیر آنها جدا می کنیم:

و تفریقها را انجام می دهیم:

$$\begin{array}{r} ۴۶ \quad ۹۳ \quad ۲۶ \quad ۵۸ \quad ۱۷ \\ \hline ۲ \quad ۵ \quad ۴ \quad ۸ \quad ۶ \end{array}$$

توضیح: ردیف بالا همان عدد مفروض است که جفت رقمها رویش مشخص شده اند، و ردیف پایین شامل باقیمانده های طرح یازده هاست که از این جفتها به دست می آید. هر یک از این باقیمانده ها را از جفت مربوط به آن به روال عادی به دست می آوریم. برای این کار رقم دهگان را از رقم یکان کم می کنیم. البته این رقمها موقتاً رقمهای یکان و دهگان قلمداد می شوند؛ مثلاً در ابتدا برای انجام این محاسبه کوچک فرض می کنیم $\underline{۴۶}$ همان عدد ۴۶ است. ضمن جلو رفتن در عدد، از چپ به راست، از $\underline{۴۶}$ نتیجه می شود ۶ منهای ۴ که ۲ است، سپس ۳ منهای ۹ می شود ۳ بعلاوه ۱۱ که ۱۴ است؛ حالا ۱۴ منهای ۹ می شود ۵ ؛ سپس ۶ منهای ۲ می شود ۴ ؛ و ۸ منهای صفر می شود ۸ ؛ و در آخر، ۷ منهای ۱ می شود ۶ . به این ترتیب رقمهای ردیف پایینی را که هر کدام مربوط به یک جفت هستند، به دست می آوریم.

حالا رقمهایی را که هم اکنون به دست آوردیم جمع می زنیم: ۲ بعلاوه ۵ می شود ۷ ، بعلاوه ۴ می شود ۱۱ ، که می گوئیم «می شود صفر»، زیرا در باقیمانده طرح یازده ها، یک ۱۱ با صفر هم ارز است؛ سپس ۸ بعلاوه ۶ می شود ۱۴ ، که می گوئیم «می شود ۳ » که طبق معمول در روش طرح یازده ها، ۱۱ تا از آن کم کرده ایم. حاصل ۳ است.

کاربردها: همان طور که پیشتر از باقیمانده های نه نه (میزانها) استفاده کردیم، باقیمانده های طرح یازده ها را نیز برای امتحان کردن محاسبات به کار می بریم. اصلی که در این مورد حاکم است، همانند آن است که قبلاً گفتیم:

هر عملی که با اعداد مفروض انجام می دهیم، همان عمل را با باقیمانده های طرح یازده ها نیز انجام می دهیم. در این صورت حاصل عمل با باقیمانده های

طرح یازده‌ها باید همان باقیمانده طرح یازده‌ها برای جواب باشد، تا جواب را درست بدانیم.

مثلاً فرض کنید می‌خواهیم ضربی را که در فصل پیش انجام دادیم امتحان کنیم. دیدیم که حاصل ضرب ۳۵۲ در ۱۱۴ می‌شود ۳۴۴۲۸. حالا این عددها را دوباره یادداشت می‌کنیم و باقیمانده طرح یازده‌ها برای هر عدد را زیرش می‌نویسیم:

$$۳۵۲ \times ۱۱۴ = ۳۴۴۲۸$$

$$(۵) \quad (۴) \quad (۹)$$

اکنون ۵ را در ۴ ضرب می‌کنیم: اگر ضرب درست باشد، نتیجه باید همان ۹ طرف راست تساوی در آید. البته، منظور این است که باقیمانده‌های این دو مقدار پس از آنکه در صورت لزوم یازده تا کم کردیم تا حتی‌المقدور کوچک شوند باید مساوی باشند. آیا اینجا هم این حالت را داریم؟ بله. چون ۵ ضرب در ۴ می‌شود ۲۰؛ با کم کردن ۱۱، عدد ۲۰ به ۹ کاهش می‌یابد. پس به موازات ضرب اصلی، تساوی باقیمانده‌های تقسیم بر یازده را داریم که هر دو ۹ هستند. دو مثال دیگر می‌آوریم. ببینید آیا خودتان می‌توانید با این روش آنها را امتحان کنید:

$$(۱) \quad ۵۲۷۳ \times ۵۴ = ۲۸۴۷۴۲$$

$$(۲) \quad ۲۷۳ \times ۱۵۴ = ۴۲۰۴۲$$

باید دریافته باشید که هر دو ضرب درست‌اند. در (۱) برای ردیف باقیمانده‌های طرح یازده‌ها داریم ۴ ضرب در ۱۵ که با ۷ مساوی گرفته شده است: یعنی باقیمانده طرح یازده‌ها برای ۴ و ۷ یکسان است. برای تبدیل کردن ۴۰، رقم ۴ را از ۵ (که ۱۱ را به آن می‌افزاییم) تفریق می‌کنیم و می‌بینیم که تساوی برقرار است.

در (۲) برای ردیف باقیمانده‌های طرح یازده‌ها در طرف چپ ۹ ضرب در صفر، و در طرف راست صفر داریم؛ ۹ ضرب در صفر می‌شود صفر، پس نتیجه امتحان مثبت است.

فصل پنجم

عمل تقسیم با سرعت و دقت بیشتر

نخستین روز درس در یکی از دانشگاههای بزرگ امریکا بود. در یکی از کلاسها، سی نفر از دانشجویان در جلسهٔ جبر سال اول برای شنیدن سخنرانی سرپرست گروه ریاضی گرد آمده بودند. استاد خود به دلیل خاصی ترتیب این کار را داده بود: می‌خواست ببیند آیا دانشجویان برای ادامهٔ کارشان پایهٔ قوی دارند یا نه. بدیهی است که بر پایهٔ ضعیف چیزی نمی‌توان بنا کرد و این روزها اغلب این مشکل پیش می‌آید که اشخاص پایهٔ قوی ندارند.

بنابراین وی همان کاری را کرد که برای یاد دادن مقدمات باید انجام شود. به دانشجویان ثابت کرد که اعتماد به نفس بیجایی دارند و باید تحت آموزش قرار بگیرند. برای اثبات این موضوع چنین عمل کرد: یک مسئلهٔ تقسیم خیلی طولانی به آنها داد که حل کنند. روی تخته سیاه عددی طولانی، مثل ۷۵۳۱۲۶۴ نوشت و از آنها خواست که آن را بر عددی مثل ۹۷۹۸ تقسیم کنند. همه فوراً دست به کار شدند و پس از مدتی حتی کندترین آنها کار را تمام کرده بود.

استاد اوراق دانشجویان را جمع کرد و به جوابها خیره شد: سی دانشجو، بیست و پنج جواب مختلف داده بودند که فقط یکی درست بود

و بیست و چهار تا غلط. شش تن از این سی نفر راه درست رفته بودند ولی بیست و چهار تای آنها اقلأ در یک جای کار اشتباه کرده بودند.

علت چه بود؟ به یاد داشته باشید که این افراد وارد دانشگاه شده بودند. همه آنها روش کار را در دبستان یاد گرفته بودند و در دبیرستان باز هم ریاضیات خوانده بودند و درسهایشان را با موفقیت پشت سر گذاشته بودند. انجام این آزمایش در مورد اشخاص عادی لابد نتایجی بمراتب ناجورتر به بار می آورد. علت این وضع آن است که به ما یاد نداده اند که درستی جواب را تحقیق کنیم. ما را طوری بار نیاورده اند که دریابیم کار مسئله تنها با یافتن جواب درست، و نه هر جوابی، به پایان می رسد. در واقع، مسئله وقتی واقعاً به آخر می رسد که ثابت کنیم جواب درست را یافته ایم.

در فصل اخیر بر اهمیت شیوه اصولی و منظمی برای امتحان کردن تأکید کردیم. اکنون که به عمل تقسیم رسیده ایم، عادت داشتن به این کار بمراتب مهمتر از قبل است که پای ضرب و جمع در میان بود. برای این منظور، دو شیوه هم ارز برای انجام عمل تقسیم عرضه می کنیم. هر دوی اینها با روش تقسیم معمولی فرق دارد.

اولی روش «ساده» است و بیشتر به کار کسانی می آید که کم و بیش «غیر ریاضی» اند، یعنی کارشان طوری است که زیاد به ریاضیات نیاز ندارند یا علاقه چندانی ندارند که به ریاضیات صرف پردازند. برای چنین اشخاصی یک روش تقسیم مناسب، روشی است که راحت به خاطر سپرده شود و حتی المقدور امکان اشتباه در یافتن جواب درست با آن ناچیز باشد.

دیگری روش «سریع» است. همه کسانی که به مبحث اعداد دلبستگی دارند از این روش خوششان خواهد آمد. این روش چنان گیراست که برای هر کسی که ذوق ریاضی دارد تکان دهنده خواهد بود و پس از فراگرفتن این روش، کار کردن با آن بمراتب آسانتر از روش معمولی است. بعلاوه، پس از کسب مهارت کامل در این

روش، تماشای آن واقعاً جالب است. جواب مربوط به تقسیمهای طولانی بی‌درنگ و بی‌هیچ محاسبهٔ بینابینی نوشته می‌شود.

روش سادهٔ تقسیم

این روش به هیچ‌گونه استعداد ریاضی نیاز ندارد. کافی است بتوانیم دو عدد را با هم جمع کنیم و عمل تفریق معمولی را انجام دهیم.

می‌خواهیم 27483624 را بر 62 تقسیم کنیم. در این کار عدد 62 طبق معمول «مقسوم‌علیه» خوانده می‌شود. ضمن انجام عمل، این 62 بالای ستونی از اعداد قرار می‌گیرد. این ستون با جمع کردن پیاپی عدد 62 که ده بار انجام می‌شود به دست می‌آید:

$$\begin{array}{r}
 \text{محل جواب} \quad 27483624 \quad 62 \\
 \hline
 62 \\
 124 \\
 \hline
 62 \\
 186
 \end{array}$$

تا آخر.

می‌خواهیم در طرف چپ ستون مقسوم‌علیه، یک ستون میزان از عددهایی که هر کدام یک مجموع ارقامند تشکیل دهیم. این ستون به صورت صفحهٔ بعد خواهد بود:

ستون مقسوم علیه ستون میزان

$$\begin{array}{r}
 ۸ \\
 \hline
 ۸ \\
 (۱۶) \rightarrow ۷
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 ۶ \ ۲ \\
 \hline
 ۶ \ ۲ \\
 ۱ \ ۲ \ ۴ \\
 \hline
 ۶ \ ۲ \\
 ۱ \ ۵ \leftarrow (۱۵)
 \end{array}$$

تا آخر.

اکنون ببینیم این میزانها را چگونه می شود یافت. چون در هر مرحله یک بار عدد ۶۲ در ستون مقسوم علیه افزوده می شود، در ستون میزان هم یک بار عدد ۸ اضافه می شود، که مجموع ارقام عدد ۶۲ است (۶ بعلاوه ۲ می شود ۸). هر وقت به عدد دو رقمی رسیدیم (چنانکه در این مثال مجموع ۸ و ۸، عدد ۱۶ شد) بی درنگ آن را تقلیل می دهیم به عددی یک رقمی، و برای این کار کافی است رقمهایش را با هم جمع کنیم. عدد ۱۶ را داشتیم بنابراین آن را به ۷ تبدیل کردیم (۱ بعلاوه ۶ می شود ۷). سپس کار را با ۷ دنبال می کنیم. در مرحله بعد، یک بار دیگر ۸ را می افزاییم. پس ۷ بعلاوه ۸ می شود ۱۵. اما این عدد دو رقمی است، پس آن را به ۶ تقلیل می دهیم (۱ بعلاوه ۵). این کار را هر بار تکرار می کنیم. این میزانها به چه کار می آیند؟ هر یک از آنها بلافاصله پس از یافته شدن مورد استفاده قرار می گیرند. پس از نخستین جمع به عدد ۱۶ می رسیم که تبدیل به ۷ می شود. توجه کنید که این عدد درست در طرف چپ نخستین مجموع اصلی، یعنی ۱۲۴، قرار دارد. پس این ۷ را با ۱۲۴ مقایسه می کنیم. با جمع زدن رقمهای ۱۲۴، داریم ۱ بعلاوه ۲ بعلاوه ۴ می شود ۷. این نتیجه با عدد ۷ که قبلاً به دست آمده تطبیق می کند. پس این ردیف درست است. حالا یک بار دیگر ۶۲ را به ۱۲۴ می افزاییم، نتیجه ۱۸۶ می شود. در طرف چپ، در ستون میزان یک ۸ دیگر می افزاییم و چنانکه در بالا دیدیم حاصل می شود ۱۵. این ۱۵ به ۶ تبدیل

می شود که میزان عدد ۱۸۶ است. آیا واقعاً همین عدد در می آید؟
 رقمهای ۱۸۶ را جمع می زنیم: ۱ بعلاوه ۸ می شود ۹، که آن را کنار
 می گذاریم و نادیده می گیریم (در امتحان به کمک مجموع ارقام همیشه
 نه ها را کنار می گذاریم!) و تنها ۶ باقی می ماند. پس ۶ با ۶ برابر است و
 نتیجه امتحان ردیف ۱۸۶ مثبت است. در هر مرحله مجدداً عدد ۶۲ را در
 ستون مقسوم علیه و ۸ را در ستون میزان می افزاییم. با هر بار انجام این
 کار، عدد جدید ستون مقسوم علیه را با عدد جدید ستون میزان مقایسه
 می کنیم. منظور از «مقایسه» این است که رقمهای مجموع جدید در
 ستون مقسوم علیه را جمع می زنیم و نگاه می کنیم ببینیم آیا با عدد جدید
 ستون میزان همخوانی دارد یا نه.

بی شک اگر ضمن کار در هر مرحله این امتحان را انجام دهیم، به
 محض بروز اشتباهی در عمل جمع، متوجه آن خواهیم شد. به این ترتیب
 در تمام عمل از اشتباه جلوگیری می شود.

این کار را چقدر باید تکرار کرد؟ ده بار. به عبارت دقیقتر، عدد
 ۶۲ باید ده بار در ستون نوشته شود، پس باید نه بار افزوده شود. و
 دهمین مجموع باید ۶۲۵ باشد. این همان مقسوم علیه اولیه است (که ۶۲
 است، ولی کلاً هر عددی می تواند باشد) با صفری که به آخرش
 افزوده ایم. گذاشتن صفری در آخر هر عدد، آن را ۱۰ برابر می کند.
 پس این عدد دهم باید همان مقسوم علیه اولیه باشد که صفری به دنبالش
 آمده است. ستون کامل، همراه با همه میزانها را در صفحه بعد می بینید:

جواب	«مقسوم»	ستون مقسوم علیه	ستون میزان
در اینجا وارد می شود	۲ ۷ ۲ ۸ ۳ ۶ ۲ ۲	(۱) ۶ ۲	۸
		۶ ۲	۸
		(۲) ۱ ۲ ۴	۷ → (۱۶)
		۶ ۲	۸
		(۳) ۱ ۸ ۶	۶ ← (۱۵)
		۶ ۲	۸
		(۴) ۲ ۲ ۸	۵ → (۱۲)
		۶ ۲	۸
		(۵) ۳ ۱ ۰	۲ ← (۱۳)
		۶ ۲	۸
		(۶) ۳ ۷ ۲	۳ → (۱۲)
		۶ ۲	۸
		(۷) ۲ ۳ ۲	۲ ← (۱۱)
		۶ ۲	۸
		(۸) ۲ ۹ ۶	۱ → (۱۰)
		۶ ۲	۸
		(۹) ۵ ۵ ۸	۰ ← (۹)
		۶ ۲	۸
		۶ ۲ ۰	۸

این ۶۲۰ با ۶۲ ضرب در ۱۰ برابر است. پس عمل درست است.
 بعد از تشکیل ستون میزان و استفاده از آن در امتحان درستی عمل
 با اعداد مجموع ارقام، دیگر نیازی به ستون میزان نخواهد بود و آن را
 می توانیم پاک کنیم.

توجه کنید که در حین عمل، مرحله‌ها را با اعداد پر رنگتری داخل پرانتز، شماره گذاری کرده‌ایم. هر یک از این شماره‌ها نشان می‌دهند که ۶۲ در چه عددی ضرب شده است. مثلاً کنار ۱۲۴ شماره (۲) آمده است. پس ۱۲۴ برابر است با ۶۲ ضرب در ۲. این شماره‌ها به مضربهای مختلف ۶۲ مربوط می‌شوند. مثلاً ۴۳۴ مضربی از ۶۲ است، زیرا ۴۳۴ برابر است با ۷ ضرب در ۶۲. بر این اساس در ستون مقسوم علیه ۴۳۴ دیده می‌شود و در کنار آن شماره (۷) قرار دارد که نشان می‌دهد این عدد حاصل ضرب ۷ در ۶۲ است.

با داشتن این ستون مقسوم علیه، دیگر لازم نیست عمل ضربی انجام دهیم و اتفاقاً بیشتر اشتباهات هم در همین عمل ضرب پیش می‌آید. بقیه این روش، طبق دستور زیر است:

از مقسوم به طور پیاپی، بزرگترین عددی را که می‌توانیم از ستون مقسوم علیه اختیار کنیم، می‌گازیم.

اینجا هم مثل روش معمولی تقسیم، عمل کاهش را از کنار چپ مقسوم می‌آغازیم. در هر مرحله به ستون مقسوم علیه می‌نگریم و بزرگترین عددی را می‌یابیم که بیش از حد بزرگ نباشد، یعنی آن قدر بزرگ نباشد که کاهش ناممکن شود. به مثال بالا بر می‌گردیم: ۲۷۴۸۳۶۲۴. اگر بنخواهیم تنها دو رقم اول را به کار ببریم، ۲۷ را داریم. حالا به ستون مقسوم علیه بر می‌گردیم. آنجا هیچ عددی نیست که از ۲۷ کوچکتر باشد. پس سه رقم اول مقسوم را می‌گیریم که ۲۷۴ می‌شود. حالا به ستون مقسوم علیه می‌نگریم. چه عددی کوچکتر از ۲۷۴ آنجا هست؟ (باید کوچکتر باشد، چون می‌خواهیم آن را از ۲۷۴ کم کنیم). خوب، ۶۲ از ۲۷۴ کوچکتر است، ۱۲۴ هم همین طور، ۱۸۶ و ۲۴۸ هم همین طورند. بقیه از ۲۷۴ بزرگترند. پس بزرگترین عددی که می‌توانیم آن را کم کنیم ۲۴۸ است. با داشتن این عدد به دستور بعدی می‌رسیم:

شماره مرحله، یا عدد مضرب، مربوط به عددی که آن را کم می کنیم، رقم بعدی جواب است.

شماره مرحله برای ۲۴۸، عدد (۴) است. پس اولین رقم جواب ۴ است:

جواب	مقسوم	ستون مقسوم علیه
۴	۲ ۷ ۲ ۸ ۳ ۶ ۲ ۲	(۱) ۶ ۲
	۲ ۲ ۸	(۲) ۱ ۲ ۲
	۲ ۶ ۸	(۳) ۱ ۸ ۶
		(۴) ۲ ۲ ۸

تا آخر.

بعد از نوشتن این رقم از جواب، عددی را که باید کاسته شود، زیر مقسوم می نویسیم و عمل کاهش را چنانکه در بالا دیده می شود، انجام می دهیم. حاصل این کاهش ۲۶ است. سپس رقم بعدی مقسوم را پایین می آوریم. این کار را در عمل تقسیم به روش معمولی هم می کردیم.

اکنون همین کار را با عدد جدیدی که زیر مقسوم داریم، تکرار می کنیم. عدد ما ۲۶۸ است. به ستون مقسوم علیه می نگریم و بزرگترین عددی را پیدا می کنیم که بیش از حد بزرگ نباشد. در این مورد عددی که در ستون مقسوم علیه پیدا می شود ۲۴۸ است. شماره مرحله آن را که (۴) است به عنوان رقمی از جواب می نویسیم و خود آن را تفریق می کنیم.

۲ ۲	۲ ۷ ۲ ۸ ۳ ۶ ۲ ۲	(۱) ۶ ۲
	۲ ۲ ۸	(۲) ۱ ۲ ۲
	۲ ۶ ۸	(۳) ۱ ۸ ۶
	۲ ۲ ۸	(۴) ۲ ۲ ۸
	۲ ۰ ۳	تا آخر.

اگر این مثال را تا آخر انجام دهیم، نتیجه به صورت زیر در خواهد آمد:

۶ ۲	(۱)	۲ ۷ ۲ ۸ ۳ ۶ ۲ ۲	۲ ۲ ۳ ۲ ۸ ۲
۱ ۲ ۲	(۲)	<u>۲ ۲ ۸</u>	
۱ ۸ ۶	(۳)	۲ ۶ ۸	
۲ ۲ ۸	(۴)	<u>۲ ۲ ۸</u>	
۳ ۱ ۰	(۵)	۲ ۰ ۳	
۳ ۷ ۲	(۶)	<u>۱ ۸ ۶</u>	
۲ ۳ ۲	(۷)	۱ ۷ ۶	
۲ ۹ ۶	(۸)	<u>۱ ۲ ۲</u>	
۵ ۵ ۸	(۹)	۵ ۲ ۲	
۶ ۲ ۰	(۱۰)	<u>۲ ۹ ۶</u>	
		۲ ۶ ۲	
		<u>۲ ۲ ۸</u>	
		۱ ۶	

باقیمانده

پس جواب ۴۴۳۲۸۴ و باقیمانده ۱۶ است.

در استفاده عملی از این روش، توجه به نکته زیر می تواند کار را آسانتر کند. هنگام تشکیل ستون مقسوم علیه باید مقسوم علیه را پی در پی بیفزاییم، اما این الزاماً بدان معنا نیست که مقسوم علیه را چندین بار بنویسیم. کافی است هر بار فقط به بالای ستونی که مقسوم علیه در آنجا نوشته شده بنگریم و مقسوم علیه را به آخرین عدد یافته شده بیفزاییم. به این ترتیب عمل تقسیم ما به صورتی که در صفحه بعد می بینید در می آید:

	$۳۶۲۰۹۵ \div ۲۶۵$	
۲۶۵ (۱)	۳ ۶ ۲ ۰ ۹ ۵	جواب ۷ ۸ ۳
۹۳۰ (۲)	۳ ۲ ۵ ۵	
۱۳۹۵ (۳)	۳ ۸ ۵ ۹	
۱۸۶۰ (۴)	۳ ۷ ۲ ۰	
۲۳۲۵ (۵)	۱ ۳ ۹ ۵	
۲۷۹۰ (۶)	۱ ۳ ۹ ۵	
۳۲۵۵ (۷)		
۳۷۲۰ (۸)		
۴۱۸۵ (۹)		
۴۶۵۰ (۱۰)	دست	

اکنون چند تمرین به عنوان نمونه داده می شود، که احتمالاً حل کردن آنها برایتان جالب خواهد بود:

$$\begin{array}{l}
 ۱۰. ۷۳۲۵۸ \div ۵۳ \qquad ۴۰. ۹۰۸۳۹ \div ۱۳۳ \\
 ۳۰. ۲۳۵۲۵۲۱۸ \div ۳۰۶۶ \\
 ۴۰. ۲۱۱۰۱۲۵۶۷۷۰ \div ۳۲۶ \\
 \text{جوابها: } ۱۰. ۱۳۸۶ \quad ۴۰. ۶۸۳ \quad ۳۰. ۷۶۷۳ \quad ۴۰. ۶۲۷۲۸۳۹۵
 \end{array}$$

احتمال خیلی کمی وجود دارد که کسی موقع کار با این روش آنقدر بی دقتی کند که عدد نامناسبی را در ستون مقسوم علیه برگزیند. البته چنین چیزی تقریباً بعید است زیرا تنها کاری که باید انجام شود تعیین بزرگترین عدد بین اعدادی است که قابل استفاده اند. بزرگترین عدد مورد قبول در ستون مقسوم علیه، آخرین عدد از اعدادی است که آنقدر کوچکند که می توانیم آنها را تفریق کنیم، و همه اعداد بعد از آن برای این کار بزرگند. با وجود این، فرض می کنیم کسی چنین اشتباهی کرده است. باز هم جای نگرانی نخواهد بود، زیرا خود شخص بی درنگ متوجه خواهد شد که در این مرحله اشتباهی رخ داده است:

۱. اگر عددی را اختیار کرده باشد که از عدد مناسب بزرگتر است، نخواهد توانست آن را تفریق کند.
۲. اگر عددی را اختیار کرده باشد که از عدد مناسب کوچکتر است، در مرحله بعدی متوجه خواهد شد که «رقم» بعدی جواب ۱۵ باید باشد، که رقم نیست.

برای امتحان کردن تفریقها، بهترین و آسانترین کار آن است که همه را یکجا امتحان کنیم. برای این منظور کافی است خود جواب را امتحان کنیم. این کار را به روش زیر انجام می دهیم:

۱. باقیمانده را از مقسوم کم می کنیم و مجموع ارقام نتیجه را به دست می آوریم. در اولین مثال این فصل، باقیمانده ۱۶ شد:

$$\begin{array}{r}
 \text{مقسوم} \quad 27283622 - \\
 \text{باقیمانده} \quad 16 \\
 \hline
 \text{مجموع ارقام } 2 = 27283608
 \end{array}$$

۲. مجموع ارقام جواب را در مجموع ارقام مقسوم علیه ضرب می کنیم:

$$\begin{array}{r}
 \text{مجموع ارقام } 7 = 2723282 \\
 \text{مجموع ارقام } 8 \times = 62 \\
 \hline
 \text{مجموع ارقام } 2 = 56
 \end{array}$$

جواب
مقسوم علیه

۳. دو نتیجه را با هم مقایسه می کنیم. اگر یکسان بودند، عمل درست است. در هر دو حالت نتیجه ۲ در آمد، پس عمل درست بوده است.

روش تقسیم سریع

حتماً به یاد دارید که در مبحث ضرب، روشی به نام «یکان و دهگان» داشتیم. اکنون می‌خواهیم نکته‌ای را از آن روش وام بگیریم و در تقسیم به کار ببریم، ولی برای این منظور، شگرد تازه‌ای در آن وارد می‌کنیم. برای یاد آوری، آنچه را قبلاً گفته‌ایم تکرار می‌کنیم. با داشتن یک جفت رقم، مثل ۳ ۴، و یک مضروب فیه یک رقمی مثل ۶، به طریقه خاصی ضرب می‌کردیم و جوابی یک رقمی، یعنی ۵ به دست می‌آوردیم:

$$\begin{array}{r} \text{د} \quad \text{ی} \\ ۴ \quad ۳ \quad \times \quad ۶ \\ \hline ۲۴ + ۱۸ \\ \hline ۵ \end{array}$$

عمل
نتیجه

این ۲۴ حاصل ضرب ۴ در ۶ و عدد ۱۸ هم حاصل ضرب ۳ در ۶ است. چون بالای رقم ۴ از ۴۳ حرف ی (به نشانه یکان) وجود دارد، تنها از رقم یکان ۲۴، که ۴ است استفاده می‌کنیم. چون بالای رقم ۳ از ۴۳ حرف د، به نشانه دهگان نوشته شده، تنها رقم ۱ را که رقم دهگان ۱۸ است به کار می‌بریم. سپس این ۱ و ۴ را با یکدیگر جمع می‌کنیم: ۱۸ بعلاوه ۲۴ می‌شود ۵. رقمهایی که زیرشان خط کشیده شده، همان یکان و دهگان هستند.

شگرد تازه، تغییر خاصی است که در این کار داده می‌شود. به جای حاصل ضرب «د ی» اکنون حاصل ضرب «د ک» را تشکیل می‌دهیم. در اینجا «ک» نشانه «کل» است، یعنی نه فقط رقم یکان، بلکه کل عدد را به کار می‌بریم:

$$\begin{array}{r} \text{د} \quad \text{ک} \\ ۴ \quad ۳ \quad \times \quad ۶ \\ \hline ۲۴ + ۱۸ \\ \hline ۲۵ \end{array}$$

عمل
نتیجه

حاصل ضرب «د ک» در اینجا ۲۵ شد. در این عمل هم ۲۴ را از ضرب ۴ در ۶ و ۱۸ را از ضرب ۳ در ۶ داشتیم. اما این بار از تمامی ۲۴ و نه فقط از رقم ۴ آن استفاده می کنیم. در مورد ۱۸ باز هم فقط رقم دهگان را به کار می بریم و حرف «د» هم نشانه این موضوع است. حالا حاصل ضرب «د ک» عدد ۷۸ در ۳ چقدر است؟ جواب ۲۳ در می آید. زیرا:

ک	د		۳	×	۸	۷
فقط اعدادی داکه زیرشان خط			۲۴	+	۲۱	عمل
کشیده شده به کاد می بریم			۲۳			نتیجه

طرز انجام عمل تقسیم

مقسوم علیه های دو رقمی

نخست مثالی را بتفصیل حل می کنیم تا تصویری کلی از این روش داشته باشید. البته این تنها به منظور آشنایی است. لزومی ندارد که در این مرحله همه جزئیات را به خاطر بسپارید. فعلاً کافی است دیدی کلی نسبت به مراحل متوالی این روش به دست آورید و به قول معروف نحوه عمل به این شیوه را «احساس» کنید. این روش با آنچه در عمل تقسیم معمولی یاد گرفته ایم تفاوت دارد، بنابراین نگاهی کلی به عمل تقسیمی که با روش جدید انجام شده می اندازیم. شرح جزئیات عمدتاً به چند بند پایین تر موکول شده است.

می خواهیم ۸۳۸۴ را بر ۳۲ تقسیم کنیم. با استفاده از این روش جدید، نهایتاً خواهیم توانست بدون نوشتن هیچ محاسبه ای، به جواب برسیم. البته فعلاً چون تازه با این روش رو به رو می شویم بهتر است مراحل

میانی را هم ثبت کنیم. صورت نهایی عمل پس از اتمام چنین خواهد بود:

صورت مسئله

جواب مقسوم علیه مقسوم

$$۸ \quad ۳ \quad ۸ \quad ۲ \div ۳۲ = ۲۶۲$$

عددهای عمل: $۲ \quad ۳ \quad ۰ \quad ۸ \quad ۰ \quad ۲$

مقسومهای فرعی: $۸ \quad ۱ \quad ۹ \quad ۶ \quad ۰$

نخستین مرحله کار این است که اولین رقم یا رقم سمت چپ مقسوم را بگیریم و آن را اولین مقسوم فرعی قلمداد کنیم. هر مقسوم فرعی یکی از رقمهای جواب را خواهد داد.

$$۸ \quad ۳ \quad ۸ \quad ۲ \div ۳۲ =$$

↓
۸ مقسوم فرعی

مرحله دوم عبارت است از تقسیم کردن مقسوم فرعی بر اولین رقم مقسوم علیه که رقم ۳ از ۳۲ است. عدد حاصل، اولین رقم جواب خواهد بود. مقسوم فرعی خیلی وقتها به طور کامل تقسیم پذیر نیست ولی این موضوع مشکلی ایجاد نمی کند زیرا خیلی راحت، از باقیمانده احتمالی چشم پوشی می کنیم؛ پس، اولین رقم جواب در اینجا ۲ است (۸ تقسیم بر ۳ می شود ۲).

حالا همین اولین رقم جواب را به طریقه خاصی در مقسوم علیه ضرب می کنیم. از این طریقه خاص، دو دسته رقم حاصل می شود. آنها را رقمهای د ک و رقمهای ی می نامیم. (اگر علت نام گذاری رقمهای د ک را درست به خاطر ندارید کافی است قدری به عقب برگردید و بخش روش تقسیم سریع را دوباره بخوانید.) در این مسئله رقم د ک برای این مرحله چنین در می آید:

د ک

$$۳۲ \times ۲ = ۶۴$$

عمل : $\underline{۵۶} \underline{۵۲}$

نتیجه : ۵۶

رقم ی هم بخشی از یک جفت د ی ناقص است. در مواردی که مقسوم علیه دو رقمی است، رقم د وارد کار نمی شود:

ی

$$۳۲ \times ۲ = ۶۴$$

عمل : $\underline{۵۲}$

اکنون برای لحظه ای رقمهای د ک و ی را کنار می گذاریم تا درباره رقمهای ردیف عددهای عمل که در بالا قرار می گیرد بحث کنیم. این عددهای عمل فقط به منظور یافتن مقسومهای فرعی که زیر آنها قرار می گیرند به کار می روند:

$$\begin{array}{r} ۸ \quad ۳ \quad ۸ \quad ۴ \div ۳۲ = ۲۶۲ \\ \hline \text{عددهای عمل :} \quad ۲۳ \quad ۵۸ \quad ۵۲ \\ \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{مقسومهای فرعی} \quad ۸ \quad ۱۹ \quad ۶ \quad ۵ \end{array}$$

توجه می کنید که هر عدد عمل شامل دو رقم است، گرچه ممکن است یکی از آنها صفر باشد. حالا می خواهیم یک رقم را از مقسوم فرعی و رقم دیگر را از مقسوم که در بالا نوشته شده به دست آوریم. رقم دهگان، یعنی رقم ۲ از ۲۳، حاصل تفریق عدد د ک (۵۶) که اندکی بالاتر آن را یافتیم، از مقسوم فرعی (یعنی ۸) است.

$$\begin{array}{r}
 ۸ \quad ۳ \quad ۸ \quad ۲ \\
 \hline
 \text{عدد عمل :} \quad \quad \quad ۲ \\
 \quad \quad \quad \swarrow \\
 \quad \quad \quad - ۰۶ \\
 \quad \quad \quad \swarrow \\
 \text{مقسوم فرعی :} \quad ۸
 \end{array}$$

مقسوم فرعی، ۸، منهای ۵ کی، ۰۶،
برابر است با ۲، که رقم دهگان عدد
عمل است

برای یافتن رقم یکان، یعنی رقم ۳ از ۲۳، کافی است رقم بعدی
مقسوم را پایین بیاوریم:

$$\begin{array}{r}
 ۸ \quad ۳ \quad ۸ \quad ۲ \\
 \hline
 \quad \quad \quad \downarrow \\
 \text{عدد عمل :} \quad \quad \quad ۲۳ \\
 \quad \quad \quad \swarrow \\
 \quad \quad \quad - ۵۳ \\
 \quad \quad \quad \swarrow \\
 \text{مقسوم فرعی :} \quad ۸
 \end{array}$$

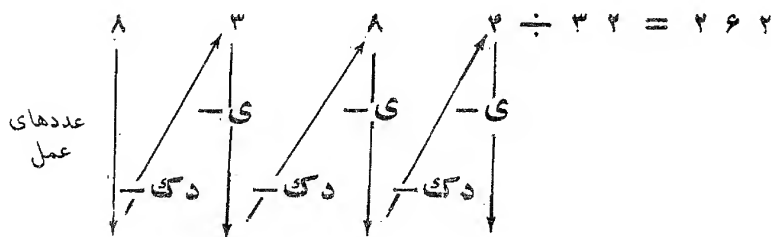
چنانکه قبلاً گفتیم، عدد عمل تنها برای این منظور نوشته می شود که
به کمک آن یک مقسوم فرعی را که درست در زیرش نوشته می شود به
دست آوریم. وقتی عدد عمل به دست آمد بی درنگ رقم ی را که اندکی
قبل پیدا شده از آن کم می کنیم:

$$\begin{array}{r}
 ۸ \quad ۳ \quad ۸ \quad ۲ \\
 \hline
 \text{عدد عمل :} \quad \quad \quad ۲۳ \downarrow \\
 \quad \quad \quad - ۵ \quad ۰۴ \downarrow \\
 \text{مقسوم فرعی :} \quad \quad ۱۹
 \end{array}$$

عدد عمل، یعنی ۲۳، منهای رقم ی
یعنی ۰۴ برابر است با مقسوم فرعی
که ۱۹ است

این مقسوم فرعی جدید رقم بعدی جواب را معلوم می کند و همچنین

در یافتن رقم دهگان عدد عمل بعدی به کار می آید. همان طور که در آغاز مبحث این روش تقسیم گفتیم، خیلی اهمیت دارد که «احساسی» نسبت به چگونگی پیشرفت محاسبه داشته باشیم و این موضوع هسته اصلی این روش محاسبه به شمار می آید. کار با یک مقسوم فرعی آغاز و منجر می شود به یافتن یک عدد عمل، که منجر می شود به یافتن یک مقسوم فرعی، که منجر می شود به یافتن یک عدد عمل، تا آخر. نحوه توالی مراحل عمل به صورت نمودار زیر است:



این هسته اصلی روش فعلی است. بقیه مطالب در واقع تکرار چیزهایی است که تا اینجا دیدیم. حالا جا دارد مثالی را که داشتیم، حل کنیم.

آخرین عددی که داشتیم ۱۹ بود. دوباره این مقسوم فرعی را بر اولین رقم مقسوم علیه، که ۳ است، تقسیم می کنیم. داریم: ۱۹ تقسیم بر ۳ می شود ۶. از باقیمانده ها چشم پوشی می کنیم. پس ۶، رقم بعدی جواب

د ک

ی

$$\begin{array}{r} ۸ \quad ۳ \quad ۸ \quad ۲ \div ۳ \quad ۲ = ۲ \quad ۶ \\ \hline ۲۳ \end{array}$$

عدد عمل:

۶ برابر است با ۱۹ تقسیم بر ۳۲: مقسومهای فرعی: ۸ ۱۹

سپس از این ۶ برای ضرب کردن ۳۲ به دو طریق استفاده می کنیم. اول حاصل ضرب د ک و سپس ی را به دست می آوریم و با این نتایج دو تفریق انجام می دهیم:

د ک

ی

$$\begin{array}{r} ۸ \quad ۳ \quad ۸ \quad ۲ \div ۳۲ = ۲۶ \\ \hline \end{array}$$

دو اینجا صفر داریم زیرا د ک ۱۹ است

$$\begin{array}{r} \circ \\ \nearrow \\ ۱۹ \text{ د ک} - \end{array}$$

د ک

$$\begin{array}{r} ۳ \quad ۲ \times ۶ \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۱۸ \quad ۱۲ \\ \hline \end{array}$$

$$۱۹$$

رقم بعدی مقسوم را پایین می آوریم:

$$\begin{array}{r} ۸ \quad ۳ \quad ۸ \quad ۲ \div ۳۲ = ۲۶ \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \circ ۸ \\ \nearrow \\ ۱۹ \quad ۸ \end{array}$$

حالا حاصل ضرب ی را تفریق می کنیم:

$$\begin{array}{r} ۸ \quad ۳ \quad ۸ \quad ۲ \div ۳۲ = ۲۶ \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \circ ۸ \\ \nearrow \quad \downarrow \\ ۱۹ \quad ۶ \text{ د ک} - \quad \text{ی} - \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ی} \\ ۳ \quad ۲ \times ۶ \\ \hline ۱۲ \\ \text{ی} = ۲ \end{array}$$

رقم بعدی جواب را با تقسیم کردن آخرین مقسوم فرعی که ۶ است بر رقم ۳ از ۳۲ پیدا می کنیم:

$$\begin{array}{r} ۸ \quad ۳ \quad ۸ \quad ۲ \div ۳ \quad ۲ = ۲ \quad ۶ \quad ۲ \\ \hline ۲۳ \quad ۰۸ \\ ۸ \quad ۱۹ \quad ۶ \end{array}$$

اکنون آخرین رقم جواب را یافته ایم، ولی اگر باقیمانده ای موجود باشد، باید آن را هم پیدا کنیم. این رقم ۲ جواب را به طریقه د ک در مقسوم علیه، یعنی ۳۲، ضرب می کنیم:

$$\begin{array}{r} ۵ \quad ۵ \\ ۳ \quad ۲ \times ۲ \\ \hline ۰۶ \quad ۰۲ \\ \text{عمل :} \end{array}$$

نتیجه : ۶

پس د ک ۶ است

حالا با کم کردن این ۶، داریم:

$$\begin{array}{r} ۸ \quad ۳ \quad ۸ \quad ۲ \div ۳ \quad ۲ = ۲ \quad ۶ \quad ۲ \\ \hline \quad \quad \quad \quad ۰۴ \\ \quad \quad \quad \nearrow \text{د ک -} \\ \quad \quad \quad ۶ \end{array}$$

۶ منهای د ک که ۶ است می شود ۰

رقم بعدی مقسوم را پایین آورده ایم. اکنون نتیجه ضرب به طریقه ی را تفریق می کنیم:

$$\begin{array}{r} ۸ \quad ۳ \quad ۸ \quad ۲ \\ \hline \end{array} \div ۳۲ = ۲۶۲$$

۰۴

— ی

۳۲ ضرب ۲ در ۲ می شود ۰۴

۰

$$(۰۴ - ی \cdot ۰۴ = ۰)$$

این صفر بدین معناست که باقیمانده‌ای نداریم. عمل تقسیم در اینجا به پایان می‌رسد.

باید یاد آوری کنیم که عملاً ضمن کار به هیچ وجه این پیکانها را نمی‌کشیم. در واقع، ابتدا عددهای عمل را می‌نویسیم، ولی پس از اندک زمانی متوجه می‌شویم که باسانی می‌توانیم برخی از آنها را حذف کنیم. نهایتاً، همه کارها به طور ذهنی انجام خواهد گرفت و جواب بدون هیچ گونه مرحله‌میان، نوشته خواهد شد. با وجود این، کار درست آن است که در آغاز کار همچنان که در مثال بالا عمل کردیم، عددهای عمل نوشته شوند.

شرح جزئیات روش

نکته ۱. «انجام آنچه به طور طبیعی پیش می‌آید» همیشه قابل توصیه نیست و گاه به حکم قانون ممنوع است. اما در موارد زیادی (که این هم یکی از آنهاست) آنچه به طور طبیعی انجام می‌گیرد، درست هم هست. چنین چیزی بسیار مطلوب است، زیرا در این صورت تنها چیزی که باید بدان توجه داشته باشیم، درست شروع کردن کار است. اولین رقم مقسوم را بر اولین رقم مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم و نتیجه، اولین رقم جواب است. مثل آنچه در صفحه بعد می‌آید:

$$\underline{۸} \ ۶ \ ۱ \div \underline{۲} \ ۱ = ۴ \qquad ۴ = ۸ \div ۲$$

حالا در مورد این یکی چه خواهیم کرد:

$$۱ \ ۶ \ ۱ \ ۲ \div ۳ \ ۱ = ?$$

نمی‌توانیم ۱ را بر ۳ تقسیم کنیم. در اینجا ناچاریم دو رقم نخست مقسوم، یعنی ۱۶ را اختیار کنیم:

$$\underline{۱} \ ۶ \ ۱ \ ۲ \div \underline{۳} \ ۱ = ۵$$

به همین ترتیب، در مورد زیر، خواهیم داشت:

$$\underline{۳} \ ۳ \ ۸ \ ۲ \div \underline{۶} \ ۴ = ۵ \qquad ۵ = ۳۳ \div ۶$$

نکته ۲. برای به دست آوردن بقیه رقمهای جواب، همچنان از اولین رقم مقسوم علیه استفاده می‌کنیم، ولی به جای خود مقسوم، مقسومهای فرعی را به آن تقسیم می‌کنیم.

نکته ۳. به محض یافتن هر رقم از جواب بلافاصله آن را به شیوه د ک (دهگان - کل) در مقسوم علیه ضرب می‌کنیم. مثلاً:

$$\underline{۲} \ ۲ \ ۹ \ ۲ \div \underline{۶} \ ۲ = \underline{۳}$$

$$\begin{array}{r} \downarrow \\ ۲۲ \end{array}$$

د ک

$$۶ \ ۲ \times ۳$$

$$\underline{۱۸} \ ۵۶$$

حاصل ضرب د ک مطلوب = ۱۸

ضرب کردن ۶۲ در ۳ به روش د ک و به طور ذهنی کار دور از تصویری نیست. این نتیجه، یعنی ۱۸، باید از آخرین عددی که یافته‌ایم، یعنی ۲۲، تفریق شود:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 9 \quad 2 \\ \hline \end{array} \div 6 \quad 2 = 3$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \nearrow \text{د ک} - \\ 22 \end{array}$$

$$22 - 18 = 4$$

در این مرحله است که بقیه رقمهای مقسوم وارد کار می‌شوند. رقم بعدی مقسوم را به صورت زیر، پایین می‌آوریم:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 9 \quad 2 \\ \hline \end{array} \div 6 \quad 2 = 3$$

$$\begin{array}{r} \downarrow \\ 29 \\ \nearrow \end{array}$$

نکته ۴. برای انجام عمل تفریق دیگر، باید رقم جدید جواب - آخرین رقم یافته شده، در اینجا ۳ - را در رقم یکان مقسوم ضرب کنیم و رقم یکان حاصل را به کار ببریم:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 9 \quad 2 \\ \hline \end{array} \div 6 \quad \underline{2} = \underline{3}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \downarrow - 6 \\ 22 \quad 23 \end{array}$$

۶ را تفریق می‌کنیم زیرا ۶ رقم یکان 3×2 است

حالا دیگر می‌توانیم مثال را به پایان برسانیم. برای این کار کافی است آنچه را در بالا کردیم تکرار کنیم.

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 9 \quad 4 \\ \hline \end{array} \div 62 = 3 \underline{7}$$

↓
۲۳

$$7 = 43 \div 6$$

سپس حاصل ضرب د ک ۶۲ در رقم جدید جواب، یعنی ۷، را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 9 \quad 4 \\ \hline \end{array} \div 62 = 3 \underline{7}$$

↓ ↗ °
۲۳

حاصل ضرب د ک = ۴۳، و ۴۳ - ۴۳ = ۰

و رقم بعدی مقسوم را پایین می‌آوریم:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 9 \quad 4 \\ \hline \end{array} \div 62 = 3 \underline{7}$$

۰۴

۲۳

و بالاخره فقط رقم یکان ۶۲ را در آخرین رقم جواب که ۷ است، ضرب می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 9 \quad 4 \\ \hline \end{array} \div 62 = 3 \underline{7}$$

۰۴
↓ - ۲
۰

$$7 \times 2 = 14$$

کار تمام است و رقم دیگری برای کار کردن نمانده است. معنی این آخرین صفر چیست؟ این عدد، باقیمانده است. آخرین عدد عمل، در ردیف پایینی، همیشه باقیمانده تقسیم است.

نکته ۶. گاه حالت زیر پیش می آید. می خواهیم عدد د ک را طبق آنچه در نکته ۳ ذکر شد، از آخرین عدد عمل بکاهیم، و می بینیم که این کار مقدور نیست. گاه عدد بزرگتر از آن است که بتوانیم آن را تفریق کنیم. مثلاً:

$$1904 \div 34 = 6$$

$\begin{array}{c} 19 \\ \downarrow \end{array}$

سپس به شیوه د ک، ۳۴ را در ۶ ضرب می کنیم:

$$\begin{array}{r} 5 \text{ ک} \\ 34 \\ 18 + 24 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$1904 \div 34 = 6$$

$\begin{array}{c} 4 \\ \nearrow \\ -20 \\ \nearrow \\ 19 \end{array}$

اما این ۲۰ را نمی توانیم تفریق کنیم زیرا از ۱۹ بزرگتر است.

در چنین مواردی،

از رقم جواب یکی کم می کنیم.

اگر از ۶ یکی کم کنیم، اولین رقم جواب به ۵ تبدیل می شود:

$$\begin{array}{r} \text{ک} \quad ۵ \\ ۱ \quad ۹ \quad ۰ \quad ۲ \quad \div \quad ۳ \quad ۲ \quad = \quad \underline{۵} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \downarrow \\ ۲۰ \\ \nearrow \\ - ۱۷ \\ \hline ۱۹ \end{array}$$

حاصل ضرب د ک ۳۴ در ۵ را تفریق می‌کنیم.

از اینجا به بعد همه چیز طبق معمول پیش می‌رود. حالا رقم یکان ۴ ضرب در ۵ را که صفر است، تفریق می‌کنیم؛ سپس رقم بعدی جواب را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} ۱ \quad ۹ \quad ۰ \quad ۲ \quad \div \quad ۳ \quad ۲ \quad = \quad ۵ \quad ۶ \\ ۲۰ \\ - ۰ \\ \hline ۲۰ \end{array} \quad ۶ = ۲۰ \div ۳$$

سپس حاصل ضرب د ک ۳۴ در این ۶ جدید، ۲۰ است که قبلاً هم به دست آمده بود:

$$\begin{array}{r} \text{ک} \quad ۵ \\ ۱ \quad ۹ \quad ۰ \quad ۲ \quad \div \quad ۳ \quad ۲ \quad = \quad ۵ \quad ۶ \\ \downarrow \\ ۰۲ \\ \nearrow \\ ۲۰ \end{array}$$

و سرانجام رقم یکان ۴ ضرب در ۶ را که ۴ است، تفریق می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 9 \quad 0 \quad 4 \quad \div \quad 3 \quad 4 \quad = \quad 5 \quad 6 \\ 04 \\ \downarrow -4 \\ 0 \end{array}$$

باز هم در پایان کار به صفر رسیده ایم. پس تقسیم باقیمانده ندارد و جواب، درست ۵۶ است.

تا اینجا در مثالها با مقسومهایی سرو کار داشتیم که چندان طولانی نبودند و مثلاً مقسومی که در مثال بالا داشتیم عدد چهار رقمی ۱۹۰۴ بود. شاید این تصور پیش بیاید که نکند از لحاظ طول این مقسومها محدودیتی داریم.

جواب منفی است. مقسوم می تواند هر قدر طولانی باشد و همیشه می توانیم از روش بیان شده استفاده کنیم. حالا مثالی طولانی را در نظر می گیریم: ۴۷۹۵۳۵ تقسیم بر ۶۳. رقمها را به فاصله می نویسیم و طبق روش مذکور عمل می کنیم:

د ک

ی

$$\begin{array}{r} 4 \quad 7 \quad 9 \quad 5 \quad 3 \quad 5 \quad \div \quad 6 \quad 3 \quad = \quad 7 \quad 6 \quad 1 \quad 1 \\ \begin{array}{cccccc} & 39 & 15 & 13 & 25 & \\ \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ -د & ی & -د & ی & -د & ی \\ \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ 47 & 38 & 7 & 10 & 22 & \end{array} \end{array}$$

باقیمانده ۴۲ است.

عملاً موقع کار پیکانها رسم نمی شود. براحتی می توانیم فرض کنیم که این پیکانها در محلهای خود قرار دارند. یک موضوع دیگر: ردیف وسطی را که مربوط به عددهای عمل است، می توانیم حذف کنیم زیرا

مطلب را دریافته ایم. در واقع شکل ظاهری عمل باید به صورت زیر باشد:

د ک

ی

$$\begin{array}{ccccccc} ۲ & ۷ & ۹ & ۵ & ۳ & ۵ & \\ & & ۳۸ & ۷ & ۱۰ & ۲۲ & \end{array} \div ۶۳ = ۷۶۱۱$$

نهایتاً، پس از آنکه با مراحل عمل خوب آشنا شدیم، خواهیم دید که می توانیم بدون هیچ گونه اعداد عمل، تقسیم را انجام دهیم. حتی اگر کسی ذهن خود را در این کار متمرکز کند، تنها ردیف عددهای عمل را هم که در مثال اخیر وجود دارد می تواند حذف کند. به این ترتیب چیزی جز خود جواب نوشته نمی شود. حروف د ک و ی که در بالا ثبت کردیم، تنها باقیمانده هایی هستند که وقتی دیدیم دیگر نیازی به آوردنشان نیست می توانیم آنها را هم حذف کنیم.

اکنون به نکته دیگری که کار را آسانتر می کند می پردازیم. این روش در مواردی به کار می آید که چند بند بالاتر ذکر کردیم و مربوط به وقتی است که می خواهیم یک عدد د ک بزرگ را از مقسوم فرعی کوچکتر از آن تفریق کنیم:

اگر دومین رقم مقسوم علیه ۸ یا ۹ است، بر اولین رقم مقسوم علیه تقسیم نمی کنیم؛ به جای این کار، بر اولین رقم مقسوم علیه یکی می افزاییم، سپس تقسیم می کنیم.

مثلاً، اگر مقسوم علیه ۳۹ بود، به جای ۳ بر ۴ تقسیم می کنیم. رقم ۹ در ۳۹ این امکان را ایجاد می کند. علت این کار را به طور حسی نیز می توانیم دریابیم: ۳۹ به ۴۰ خیلی نزدیکتر است تا ۳۰. به همین ترتیب، با داشتن مقسوم علیه ۳۸ بهتر خواهد بود که به جای ۳ بر ۴ تقسیم کنیم. مثال:

$$۲۰۲۸ \div ۳۹ = ?$$

$$\underline{۲۰}$$

طبق آنچه تا کنون عمل می کردیم، در نخستین مرحله می گوییم «۲۰» تقسیم بر ۳ می شود ۶»، و ۶ را به عنوان نخستین رقم جواب یادداشت می کنیم. اما در این صورت ناگزیر خواهیم شد ۶ را اصلاح و به ۵ تبدیل کنیم، زیرا حاصل ضرب ۵ ک بیش از حد بزرگ در می آید و نمی توانیم آن را تفرق کنیم (اینجا داریم: $۳۹ \times ۶ = ۱۸ + ۵۴ = ۷۲$ حاصل ضرب ۵ ک). اما اکنون از نکته آسان ساز استفاده می ببریم و ۲۰ را به جای ۳ بر ۴ تقسیم می کنیم. با این کار، اولین رقم جواب، بلافاصله ۵ در می آید و نیازی به تصحیح نخواهد داشت:

$$۲۰۲۸ \div ۳۹ = ۵$$

$$\downarrow$$

$$(۲)$$

$$۵ = ۲۰ \div ۴$$

$$\underline{۲۰}$$

توجه کنید که در هر صورت جواب درست به دست می آید، چه از نکته آسان ساز استفاده کنیم و چه نکنیم. در صورت تمایل می توانیم پا را از این فراتر بگذاریم و این رقم یکی بیشتر را در مواردی که رقم دوم ۶، ۷، ۸ یا ۹ است به جای اولین رقم مقسوم علیه به کار ببریم. با این حساب وقتی مقسوم علیه ۳۶ داریم، برای یافتن رقم بعدی جواب، عددهای عمل را بر ۴ تقسیم می کنیم.

اگر این موضوع را شامل ۶ و ۷ هم بکنیم، گاه رقم یافته شده در جواب از مقدار مناسب کوچکتر در می آید. این وضع باید تصحیح شود، همان طور که قبلاً وقتی رقم جواب بیش از مقدار مناسب می شد آن را کم می کردیم. این حالت برای وقتی هم که رقم دوم ۸ یا ۹ باشد ممکن است

پیش بیاید ولی چنین مواردی نادر است.

چطور می توانیم بفهمیم که رقم جدید جواب از مقدار مناسب کوچکتر است؟ حاصل ضرب د ک چیزی را روشن نمی کند، زیرا کوچک است و حتماً می توانیم آن را تفریق کنیم. حاصل ضرب ی هم ما را متوجه موضوع نخواهد کرد. اما در اینجا است که «مقسوم فرعی» به کمکمان می آید:

اگر مقسوم فرعی بزرگتر از مقسوم علیه در آمد، یا حتی با آن مساوی شد، آخرین رقم جواب از مقدار مناسب کوچکتر است.

فرض می کنیم کسی بر اثر بی دقتی هنگام عمل تقسیم اشتباهی به صورت زیر مرتکب شود:

$$\begin{array}{r} 6 \\ 81 \overline{) 5763} \end{array}$$

البته این اشتباه فاحشی است، زیرا می دانیم که ۵۷ تقسیم بر ۸ می شود ۷ و نه ۶. اما توجه کنید که این اشتباه چطور خود را در مقسوم فرعی نشان می دهد:

$$\begin{array}{r} 6 \\ 81 \overline{) 5763} \end{array}$$

۹۶

—۶

$$56 = 8 \times 7$$

۵۷ ۹۰

این مقسوم فرعی که ۹۰ در آمده مسلماً غلط است زیرا از مقسوم علیه بزرگتر است. پس باید ۶ را به ۷ تبدیل کنیم. اگر به بزرگتر بودن ۹۰ از ۸۱ توجه نکنیم، در مرحله بعدی ناگزیر

به آن توجه خواهیم کرد. زیرا خواهیم گفت ۹۵ تقسیم بر ۸ می شود ۱۱ و این یعنی «رقم بعدی جواب ۱۱ است». چنین چیزی ممکن نیست زیرا ۱۱ رقم نیست. پس متوجه می شویم که ۶ از مقدار مناسب کوچکتر است، و آن را به ۷ افزایش می دهیم.

مقسوم علیه های سه رقمی

فرض کنید می خواهیم ۲۳۶۸۳۱ را بر ۶۷۴ تقسیم کنیم. نحوه محاسبه تقریباً مثل کاری است که تا کنون می کردیم. این عمل خیلی شبیه به وقتی است که به جای ۶۷۴ بر ۶۷ تقسیم می کنیم. در عین حال، پای رقم سوم مقسوم علیه هم به میان می آید.

لابد نمودارهایی را که قبلاً داشتیم به یاد می آورید که در آنها پیکانه های کجی به طرف بالا به معنی «تفریق حاصل ضرب د ک» و پیکانه های رو به پایین به معنی «تفریق حاصل ضرب ی» ظاهر می شد. حالا معنی این پیکانه های رو به پایین، قدری تغییر می کند. با این معنی جدید، رقم جدید که رقم ۴ در ۶۷۴ است به کار گرفته می شود، این تغییر با مقایسه دو نمودار زیر روشن می شود:

مقسوم علیه های دو رقمی

د ک

ی

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3 \quad 6 \quad 8 \quad 3 \quad 1 \quad \div \quad 67 = ? \\ \hline \end{array}$$

مقسوم علیه های سه رقمی

د ک

د ی

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3 \quad 6 \quad 8 \quad 3 \quad 1 \quad \div \quad 672 = ? \\ \hline \end{array}$$

معنای این کار چیست؟ همان چیزی که از نگاه کردن به نمودار استنباط می‌شود. حاصل ضرب د ک را با استفاده از ۶۷ و رقم جواب تشکیل می‌دهیم، تا آن را طبق پیکان رو به بالا تفریق کنیم:

د ک

د ی

$$\begin{array}{r} ۲ \quad ۳ \quad ۶ \quad ۸ \quad ۳ \quad ۱ \quad \div \quad ۶۷۲ = ۳ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۳۶ \\ \nearrow \\ -۲۰ \\ \swarrow \\ ۲۳ \end{array}$$

$$د ک = ۶۷ \times ۳ = ۱۸ + ۲۱ = ۳۹$$

این کار مثل گذشته انجام شد و فقط رقم ۴ در ۶۷۴ را نادیده گرفتیم. اما اکنون به تفریق کردن حاصل ضرب ی، طبق پیکان رو به پایین، می‌رسیم. حالا دیگر این حاصل ضرب، به حاصل ضرب د ی تبدیل می‌شود:

د ک

د ی

$$\begin{array}{r} ۶ \quad ۷ \quad ۴ \quad \times \quad ۳ \\ \text{عمل :} \quad ۲۱ \quad ۱۲ \quad \text{د ی} = ۷۴ \times ۳ = ۲۱ + ۱۲ = ۳۳ \\ \text{نتیجه :} \quad ۲ \end{array}$$

پس در پایین رفتن از ۳۶ که در مرحلهٔ اخیر به آن رسیدیم، د ی را که ۲ است تفریق می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} ۲ \quad ۳ \quad ۶ \quad ۸ \quad ۳ \quad ۱ \quad \div \quad ۶۷۲ = ۳ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۳۶ \\ | \\ -۲ \\ \downarrow \\ ۳۴ \end{array}$$

آخرین عددمان ۳۴ است. این عدد در ردیف پایینی قرار گرفته، بنابراین مقسوم فرعی است و اکنون آن را طبق معمول بر رقم ۶ از ۶۷۴ تقسیم می‌کنیم. با این کار ۵ به عنوان رقم بعدی جواب به دست می‌آید:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3 \quad 6 \quad 8 \quad 3 \quad 1 \quad \div \quad 6 \quad 7 \quad 4 = 3 \quad 5 \\ \downarrow \\ 22 \end{array}$$

عمل به همین ترتیب دنبال می‌شود. حاصل ضرب د ک ۶۷ با ۵ را تشکیل می‌دهیم و آن را از مقسوم فرعی کم می‌کنیم. سپس حاصل ضرب د ی ۷۴ با این ۵ را تشکیل می‌دهیم و آن را تفریق می‌کنیم تا مقسوم فرعی بعدی به دست آید.

البته این مشابهت تمام و کمال نیست! هنگام تکرار، مختصر تفاوتی وجود دارد. با رقم بعدی جواب عیناً همان طور که با رقم اول عمل شد، عمل نمی‌کنیم: از هر دو رقم جواب که تا کنون یافته شده استفاده می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} \text{د ی} \\ \text{د ی} \\ \text{ی} \\ \hline 2 \quad 3 \quad 6 \quad 8 \quad 3 \quad 1 \quad \div \quad 6 \quad 7 \quad 4 = 3 \quad 5 \end{array}$$

۱۸

— د ی — — ی —

↗ ↓

۳۲ ۹

حاصل ضرب د ک طبق معمول برابر است با: ۶۷ ضرب در ۵، که می شود ۳۵ بعلاوه ۳۵ که برابر با ۳۳ است. این ۳۳ را از ۳۴ تفریق می کنیم، ۱ باقی می ماند؛ ۸ را پایین می آوریم، در نتیجه در ردیف عمل ۱۸ خواهیم داشت. اما اکنون عددی که باید از ۱۸ تفریق شود مجموع دو جزء است: یک د ی بعلاوه یک ی. نمودار بالا طرز تعیین این دو جزء را نشان می دهد.

$$\begin{array}{r} \text{د ی} \\ ۶ \quad ۷ \quad ۲ \quad \times \quad ۳۵ \\ \hline ۳۵ \quad ۲۰ \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{ی} \\ ۶ \quad ۷ \quad ۲ \quad \times \quad ۳۵ \\ \hline ۱۲ \end{array}$$

$$۹ = (\text{حاصل ضرب ی ۲}) + (\text{حاصل ضرب د ی ۷}) : \text{نتیجه}$$

پس مجموع حاصل ضربهای د ی و ی، ۹ می شود. این ۹ را از ۱۸ که در عمل تقسیم به آن رسیدیم کم می کنیم، مقسوم فرعی ۹ به دست می آید. این ۹ را بر رقم ۶ از ۶۷۴ تقسیم می کنیم ۱ حاصل می شود. پس رقم بعدی جواب ۱ است:

$$\begin{array}{r} ۲ \quad ۳ \quad ۶ \quad ۸ \quad ۳ \quad ۱ \quad \div \quad ۶ \quad ۷ \quad ۴ = ۳ \quad ۵ \quad ۱ \\ ۳۶ \quad ۱۸ \\ \hline ۲۳ \quad ۳۲ \quad ۹ \end{array}$$

در این مثال خاص نیازی به یافتن رقم دیگری نیست؛ همان ۳۵۱، خارج قسمت مورد نظر است.

البته در موارد دیگر ممکن است مقسوم خیلی طولانیتر از این عدد ۲۳۶۸۳۱ باشد که در این صورت ناچاریم تکرار مراحل بالا را بیشتر ادامه دهیم. برای آنکه اشکالی از این لحاظ پیش نیاید، دستور کلی زیر را بیان می کنیم:

هرگاه مقسوم علیه سه رقم داشته باشد (که در نمودار زیر آنها را با سه X نشان داده ایم)، تفریق د ی یا «رو به

پایین «طبق شکل زیر انجام می شود:

$$\begin{array}{r} \text{د ی} \\ \text{ی} \\ \text{XXX} \div \text{مقسوم} = \text{---XXX} \end{array}$$

دو X موجود در جواب، آخرین دو رقم یافته شده از جواب ناقص، هستند.

چنانکه گفتیم، در مثال اخیر جواب ۳۵۱ شد. اما هنوز باید باقیمانده را معلوم کنیم. برای آنکه بدانیم چه وقت خارج قسمت را به طور کامل یافته‌ایم، به شیوه زیر عمل می کنیم:

از سمت راست مقسوم، به تعداد یکی کمتر از ارقام مقسوم علیه، رقم جدا می کنیم.

در مثال اخیر مقسوم علیه ۶۷۴ است که سه رقم دارد؛ باید یکی کمتر از این تعداد، یعنی دو رقم را جدا کنیم:

$$۲۳۶۸ / ۳۱$$

این علامت به ما نشان می دهد که چه وقت عمل تمام می شود. همه رقمهایی که در طرف چپ این علامت واقعند، در یافتن ارقام جواب، یا خارج قسمت به کار می آیند. رقمهای واقع در سمت راست علامت برای تعیین باقیمانده به کار گرفته می شوند. حالا باقیمانده مثال بالا را به دست می آوریم:

د ک
د ی
ی

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3 \quad 6 \quad 8 \quad / \quad 3 \quad 1 \quad \div \quad 6 \quad 7 \quad 2 = 3 \quad 5 \quad 1 \\ 18 \quad 33 \quad 261 \\ 9 \quad 26 \quad 257 \end{array}$$

باقیمانده ۲۵۷ است

عدد عمل ۳۳ را به طریقه عادی به دست آوردیم: حاصل ضرب د ک ۶۷ در ۱، می شود ۵۶ بعلاوه ۵۷ که برابر با ۶ است. این ۶ را از ۹ کم می کنیم حاصل ۳ می شود رقم ۳ ی مقسوم را هم پایین می آوریم. از این ۳۳، حاصل ضربهای د ی و ی را مانند قبل کم می کنیم (د ی برابر است با ۷۴ ضرب در ۱، یعنی ۵۷ بعلاوه ۵۴ که برابر با ۷ است؛ ی برابر است با ۴ ضرب در ۵، یعنی ۲۰، که صفر است) پس داریم ۳۳ منهای ۷ که ۲۶ است.

این ۲۶ را بدون هیچ گونه تفریق د ک به بالا می بریم تا رقم ۱ مربوط به مقسوم هم در کنارش قرار گیرد و ۲۶۱ حاصل شود. آخرین مرحله رو به پایین با تفریق کردن حاصل ضرب رقم سمت راست مقسوم علیه (رقم ۴ از ۶۷۴) و رقم سمت راست جواب (رقم ۱ از ۳۵۱) انجام می شود.

$$\begin{array}{r} 261- \\ 4 \\ \hline 257 \end{array}$$

باقیمانده ۲۵۷ است.

موضوع را به این صورت در نظر بگیرید: علامت (خط مورب) مقسوم علیه را به دو بخش تقسیم می کند؛ بخش خارج قسمت در طرف چپ و بخش باقیمانده در طرف راست. خود علامت در حکم خط مرزی

بین این دو ناحیه است. عبور از این مرز در یک پیکان د ک رو به بالا (تفریق) رخ می دهد که مربوط به آخرین رقم جواب است. هنگام عبور از مرز هنوز داریم «عادی» عمل می کنیم یعنی همان شیوه عمل در ناحیه خارج قسمت را ادامه می دهیم. در واقع، این مرحله تا آخر به طور عادی انجام می شود، زیرا تفریق (ی + د ک) بعدی نیز مانند ناحیه خارج قسمت انجام می گیرد. تنها پس از این است که دستورالعمل ناحیه باقیمانده را به کار می بریم که با دستورالعمل ناحیه خارج قسمت از دو لحاظ فرق دارد:

۱. در اینجا دیگر هیچ گونه تفریق د ک انجام نمی شود. پیکان رو به بالا، تمامی مقسوم فرعی را با خود منتقل می کند.

۲. در آخرین تفریق رو به پایین فقط از حاصل ضرب رقم سمت راست جواب (نه دو رقم آخر) و رقم سمت راست مقسوم علیه استفاده می شود.

تشریح محاسبه مربوط به باقیمانده موضوع مفیدی است که با برخی اصلاحات برای مقسوم علیه های به طول دلخواه قابل استفاده است. در بخش بعد، به این موضوع باز خواهیم گشت.

یک مثال دیگر: می خواهیم ۱۹۶۳۰۷ را بر ۵۱۲ تقسیم کنیم. عدد ۵۱۲ سه رقم دارد، پس از طرف راست دو رقم را جدا و سپس عمل تقسیم را شروع می کنیم:

د ک
د ی
ی

$$\begin{array}{r} 196307 \div 512 = 383 \\ \underline{196307} \\ 33 \\ \underline{33} \\ 18 \end{array}$$

حالا از خط مرزی (خط مورب) با یک تفریق د ک عادی می گذریم و این مرحله را با یک تفریق رو به پایین عادی، کامل می کنیم:

$$\begin{array}{r}
 \text{د} \text{---} \\
 \text{دی} \text{---} \\
 \text{ی} \text{---}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 512 = 383 \\
 \text{دک} = 51 \times 3 = 15 \\
 \text{دی} = 12 \times 3 = 3 \\
 \text{ی} = 2 \times 8 = 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 9 \quad 6 \quad 3 \quad / \quad 0 \quad 7 \quad \div \\
 \hline
 \quad \quad 46 \quad 33 \quad 30 \\
 19 \quad 23 \quad 18 \quad 21
 \end{array}$$

حالا به دستورالعمل باقیمانده می رسیم و در پیکان رو به بالا چیزی تفریق نمی کنیم، بلکه مقسوم فرعی را به عنوان بخشی از عدد عمل جدید عیناً بالا می بریم. سپس در پیکان رو به پایین، تنها حاصل ضرب آخرین رقم جواب ۳۸۳، یعنی ۳، در آخرین رقم مقسوم علیه، یعنی ۲، کاسته می شود (بر خلاف شیوه «عادی» که در آن از ۸۳ استفاده می شد):

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 9 \quad 6 \quad 3 \quad / \quad 0 \quad 7 \quad \div \quad 512 = 383 \\
 \hline
 \quad \quad 46 \quad 33 \quad 30 \quad 217 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow \\
 19 \quad 23 \quad 18 \quad 21 \quad 211 \quad \text{باقیمانده}
 \end{array}$$

توجه کنید که در طرف راست خط مرزی، هیچ گونه «مقسوم فرعی» نداریم و همه اعداد «عدهای عمل» هستند. یعنی هیچ یک از این عددها برای یافتن رقم بعدی جواب، بر اولین رقم مقسوم علیه تقسیم نمی شوند. جواب به طور کامل به دست آمده است و اکنون به دنبال یافتن باقیمانده هستیم.

این هم مثالی با مقسوم طولانی که حل آن به صورتی که عملاً

می تواند انجام شود، ثبت شده است:

د ک

د ی

ی

$$\begin{array}{r} ۶ \quad ۳ \quad ۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۲ / ۵ \quad ۷ \div ۹ \quad ۸ \quad ۳ = ۶۲۲۱۴ \\ ۵۱ \quad ۳۲ \quad ۲۳ \quad ۶۲ \quad ۹۵ \quad ۸۹۷ \\ ۶۳ \quad ۴۲ \quad ۲۱ \quad ۱۵ \quad ۴۸ \quad ۸۹ \quad ۸۹۵ \end{array}$$

جواب ۶۴۲۱۴ است. باقیمانده هم ۸۹۵ است (توجه کنید که عدد ۹۸۳ با داشتن ۸ به عنوان رقم دوشم، خیلی به ۱۵۵۵ نزدیک است، از این رو مقسومهای فرعی را به جای ۹ بر ۱۵ تقسیم می کنیم تا بعداً مجبور به تصحیح بعضی از رقمهای جواب نشویم).

باز هم مثالی دیگر: ۳۹۸۶۳۹۵۷ تقسیم بر ۷۲۹. چون دومین رقم ۷۲۹ فقط ۲ است و ۸ یا ۹ نیست، در اینجا به جای ۷ رقم ۸ را مقسوم علیه قرار نمی دهیم. از طرف دیگر، در یک جا مجبور خواهیم شد رقمی از جواب را تقلیل دهیم، زیرا به حالتی می رسیم که مجموع د ی و ی بیشتر از آن است که بتوانیم آن را تفریق کنیم. این وضع برای یک رقم ۷ پیش می آید که آن را خط می زنیم و به ۶ تصحیح می کنیم:

د ک

د ی

ی

$$\begin{array}{r} ۳ \quad ۹ \quad ۸ \quad ۶ \quad ۳ \quad ۹ / ۵ \quad ۷ \div ۷ \quad ۲ \quad ۹ = ۵۴ \cancel{۷} \quad ۶۸۳ \\ ۳۸ \quad ۶۶ \quad ۷۳ \quad ۳۹ \quad ۱۵ \quad ۵۷ \\ ۳۹ \quad ۳۴ \quad ۵۰ \quad ۶۵ \quad ۲۲ \quad ۰ \quad ۰ \end{array}$$

جواب ۵۴۶۸۳ است. باقیمانده هم صفر است، پس مقسوم بر مقسوم علیه

بخش پذیر بوده است.

چند مثال

بد نیست سه مثال زیر را خودتان حل کنید. این مثالها با توجه به «راهنماییها»ی عرضه شده به دنبال مسئله سوم حل می شوند. اگر احساس می کنید که بدون این راهنماییها می توانید آنها را حل کنید، راهنماییها را نخوانید.

$$۱. ۹۲۸۸۰ \div ۴۳۲ = ?$$

$$۲. ۳۱۳۹۲ \div ۶۵۴ = ?$$

$$۳. ۵۴۷۶۳ \div ۴۸۹ = ?$$

راهنماییها: آخرین مقسوم علیه، یعنی ۴۸۹، دومین رقمش ۸ است، پس در هر مرحله می توانیم مقسوم فرعی را به جای ۴، بر ۵ تقسیم کنیم. از سوی دیگر، اگر بر ۴ هم تقسیم کنیم می توانیم به جواب درست برسیم. طبعاً در این صورت به مواردی می رسیم که باید جواب را تصحیح کنیم. در هر حال، به یاد داشته باشید که (۱) هر مقسوم فرعی را در هر یک از مسائل، تقسیم می کنیم و نتیجه را به عنوان رقمی از جواب می نویسیم؛ (۲) حاصل ضرب د ک این رقم را می یابیم و آن را تفریق می کنیم؛ و سپس (۳) حاصل ضرب دی آخرین رقم جواب را با حاصل ضرب ی در رقم ماقبل آخر جواب جمع می کنیم و حاصل را از عدد عمل کم می کنیم.

جوابها:

$$۱. \quad ۹ \quad ۲ \quad ۸ \quad ۸ \quad ۰ \quad \div \quad ۴ \quad ۳ \quad ۲ = ۲ \quad ۱ \quad ۵$$

$$۱۲ \quad ۲۸ \quad ۰۸ \quad ۰۰$$

$$۹ \quad ۶ \quad ۲۱ \quad ۰ \quad ۰$$

باقیمانده ندارد

$$۲. \quad ۳ \quad ۱ \quad ۳ \quad ۹ \quad ۲ \quad \div \quad ۶ \quad ۵ \quad ۲ = ۲ \quad ۸$$

$$۵۳ \quad ۰۹ \quad ۰۲$$

$$۳۱ \quad ۵۲ \quad ۰ \quad ۰$$

باقیمانده ندارد

$$۳. \quad ۵ \quad ۲ \quad ۷ \quad ۶ \quad ۳ \quad \div \quad ۲ \quad ۸ \quad ۹ = ۱ \quad ۱ \quad ۱$$

$$۱۴ \quad ۲۷ \quad ۶۶ \quad ۴۹۳$$

$$۵ \quad ۶ \quad ۱۰ \quad ۲۹ \quad ۴۸۴$$

باقیمانده ۴۸۴ است

مقسوم علیه‌های به طول دلخواه

اگر در عمل تقسیم، مقسوم علیه‌هایی با چهار رقم یا بیشتر داشته باشیم، مثل ۱۳۶۷۱۵۱۴ تقسیم بر ۴۲۱۷، بر اساس همان شیوه‌های قبلی عمل می‌کنیم:

۱. حاصل ضرب د ک را تفریق می‌کنیم تا عدد عمل به دست آید.
۲. حاصل ضرب د ی را از عدد عمل کم می‌کنیم تا مقسوم‌فرعی جدید معلوم شود.

۳. نتیجه را (که مقسوم‌فرعی است) بر اولین رقم مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم تا رقم بعدی جواب پیدا شود.

اما اکنون با داشتن مقسوم علیه چهار رقمی یک رقم اضافی، مثل رقم ۷ در ۴۲۱۷ داریم که باید آن را در نظر بگیریم. برای این منظور، حاصل ضرب د ی را تعمیم می‌دهیم، ولی دو مرحله دیگر (۱ و ۳) به همان صورت باقی می‌مانند. منظور از این «تعمیم» را می‌توانیم با مقایسه موارد زیر دریابیم:

د ک

ی

۲ ۲

مقسوم علیه دو رقمی:

د ک

د ی

ی

۴ ۲ ۱

مقسوم علیه سه رقمی:

د ک

د ی

د ی

ی

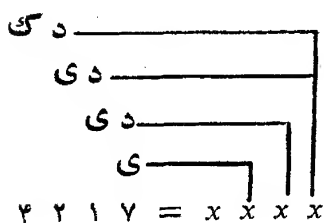
۴ ۲ ۱ ۷

مقسوم علیه چهار رقمی:

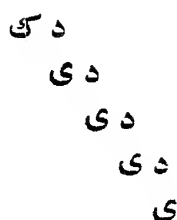
با اضافه شدن هر رقم، یک جفت د ی دیگر نیز وارد کار می شود. نتیجه این وضع چیزی است که در بالا می بینیم، یعنی تداخل جفتهای د ی. هر مقسوم علیه چهار رقمی در اوج گسترش خود سه جفت د ی خواهد داشت؛ مقسوم علیه پنج رقمی، چهار جفت د ی خواهد داشت. همیشه در پایان یک ی منفرد داریم که در حقیقت آن هم یک جفت د ی است. حرف د آن روی هیچ رقمی قرار نمی گیرد بنابراین نقشی در کار ندارد و لزومی به نوشتن این د نیست.

برای ضرب کردن در د ی، کدام رقم را باید اختیار کنیم؟ مسلماً با هر جفت د ی یکی از رقمهای جواب مربوط می شود، ولی کدام یکی؟ بد نیست یک جواب نامشخص، یا بخشی از آن را که یافته شده، به

صورت تعدادی x بنویسیم. هر x نشانهٔ رقمی است که فعلاً لزومی ندارد آن را مشخص کنیم. فرض کنید چهار رقم از جواب را یافته‌ایم. در این صورت برای انجام ضرب به طریقهٔ d ی، جفتهای d ی به صورت زیر با ارقام جواب مربوط می‌شوند:

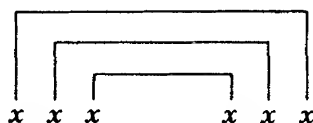


مقسوم علیه‌های چهار رقمی:



مقسوم علیه‌های پنج رقمی:

سپس حاصل این ضربهای d ی را با یکدیگر جمع می‌کنیم. در مورد مضروب فیه‌های دو رقمی و سه رقمی هم در واقع همین کار را می‌کردیم. اگر به طرز قرار گرفتن خطهای نمودار در کنار یکدیگر توجه کنیم، می‌بینیم که یک «مجموعهٔ تو در تو» شبیه به آنچه در فصل ضرب داشتیم، پدید می‌آورند:



دستوری که در اینجا برای حرکت داریم چنین است: «از هر دو کناره به سمت داخل بروید.» این شیوه را کلاً می‌توانیم به صورت زیر خلاصه کنیم:

۱. در هر مرحله، رقم جدید جواب را در دو رقم اول مقسوم علیه (مثلاً ۴۲ از عدد ۴۲۱۷) به طریقهٔ د ک ضرب می‌کنیم.
 ۲. همان رقم جدید جواب را به طریقهٔ د ی در دومین و سومین رقم مقسوم علیه (مثلاً ۲۱ در عدد ۴۲۱۷) ضرب می‌کنیم.
 ۳. سپس به سمت داخل پیش می‌رویم و سایر جفتهای د ی از مقسوم علیه را به نوبت در رقم «قبلی» جواب ضرب می‌کنیم (چنانکه در ۴۲۱۷، دوباره به سمت داخل می‌رویم، اول به جفت ۱۷ و سپس به جفت د ی ناقص ۷ می‌رسیم).
- بد نیست نگاهی به مثال ۱۳۶۷۱۵۱۴ تقسیم بر ۴۲۱۷ که در بالا داشتیم، بیندازیم. سه دستور اخیر را به کار می‌گیریم تا ببینیم چطور با آنها جواب پیدا می‌شود. قبل از هر چیز، توجه می‌کنیم که مقسوم علیه، یعنی ۴۲۱۷ دارای چهار رقم است، پس از سمت راست سه رقم (یعنی یکی کمتر از مقسوم علیه) را جدا می‌کنیم:

$$1 \quad 3 \quad 6 \quad 7 \quad 1 / 5 \quad 1 \quad 4 \quad \div \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 7 = 3$$

۱۳

از سه رقم آخر مقسوم برای یافتن باقیمانده استفاده خواهیم کرد. اولین رقم جواب ۳ است که با تقسیم کردن ۱۳ بر رقم ۴ از عدد ۴۲۱۷ به دست می‌آید. حالا این سه دستور را به کار می‌بندیم:

دومین رقم جواب:

حاصل ضرب د ک را تفریق می‌کنیم (دستور ۱):

د ک

$$۱۳۶۷۱/۵۱۲ \div ۲۲۱۷ = ۳$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \nearrow \\ ۱۲(۱۲) - د ک \\ \swarrow \\ ۱۳ \end{array}$$

$$د ک = ۲۲ \times ۳$$

$$\begin{array}{r} ۱۲ \\ \underline{۰۶} \end{array}$$

$$د ک = ۱۲$$

حاصل ضرب دی را تفریق می کنیم (دستور ۲):

د ک
دی

$$۱۳۶۷۱/۵۱۲ \div ۲۲۱۷ = ۳$$

$$\begin{array}{r} ۱۶ \\ \downarrow \\ ۰۶(۰۶) - دی \\ \downarrow \\ ۱۳ \quad ۱۰ \end{array}$$

$$دی = ۲۱ \times ۳$$

$$\begin{array}{r} ۰۶ \\ \underline{۰۳} \end{array}$$

$$دی = ۶$$

مقسوم فرعی ۱۰ را بر رقم ۴ از ۴۲۱۷ تقسیم می کنیم تا رقم بعدی جواب که ۲ است، به دست آید.

سومین رقم جواب: حاصل ضرب د ک را تفریق می کنیم (دستور ۱):

د ک
دی
دی

$$۱۳۶۷۱/۵۱۲ \div ۲,۲۱۷ = ۳۲$$

$$\begin{array}{r} ۱۶ \quad ۲۷ \\ \nearrow \\ ۰۸(۰۸) - د ک \\ \swarrow \\ ۱۳ \quad ۱۰ \end{array}$$

$$د ک = ۲۲ \times ۲$$

$$\begin{array}{r} ۰۸ \\ \underline{۰۴} \end{array}$$

$$د ک = ۸$$

حاصل ضربهای دی را تفریق می کنیم (دستورهای ۲ و ۳):

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 \text{د ک} \\
 \text{د ی} \\
 \text{د ی}
 \end{array} \\
 ۱ \quad ۳ \quad ۶ \quad ۷ \quad ۱ / ۵ \quad ۱ \quad ۲ \quad \div \quad ۲ \quad ۲ \quad ۱ \quad ۷ = ۳ \quad ۲ \\
 \begin{array}{r}
 ۱۶ \quad ۲۷ \\
 \downarrow \\
 - \text{د ی} (۰۹) \\
 \downarrow \\
 ۱۳ \quad ۱۰ \quad ۱۸
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{د ی} = ۲۱ \times ۲; \quad ۱۷ \times ۲ \\
 \begin{array}{r}
 ۰۲ \quad ۰۲ \quad ۰۳ \quad ۲۱ \\
 \text{د ی} = ۲ + ۵ = ۰۹
 \end{array}
 \end{array}$$

طبعاً پس از این، رقم بعدی جواب از تقسیم کردن عدد اخیر ۱۸ بر رقم ۴ از ۴۲۱۷ به دست می آید (۱۸ تقسیم بر ۴، می شود ۴).

آخرین رقم جواب:

چهارمین رقم جواب، در این مثال آخرین رقم است (این مطلب با توجه به خط موربی که خارج قسمت را به دو بخش خارج قسمت و باقیمانده تفکیک کرده، مشخص می شود). حاصل ضرب د ک را تفریق می کنیم (دستور ۱):

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 \text{د ک} \\
 \text{د ی} \\
 \text{د ی} \\
 \text{ی}
 \end{array} \\
 ۱ \quad ۳ \quad ۶ \quad ۷ \quad ۱ / ۵ \quad ۱ \quad ۲ \quad \div \quad ۲ \quad ۲ \quad ۱ \quad ۷ = ۳ \quad ۲ \quad ۲ \\
 \begin{array}{r}
 ۱۶ \quad ۲۷ \quad ۲۱ \\
 - \text{د ک} (۱۶) \\
 \downarrow \\
 ۱۳ \quad ۱۰ \quad ۱۸
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{د ک} = ۲۲ \times ۲ \\
 \begin{array}{r}
 ۱۶ \quad ۰۸ \\
 \text{د ک} = ۱۶
 \end{array}
 \end{array}$$

حاصل ضربهای د ی را تفریق می کنیم (دستورهای ۲ و ۳):

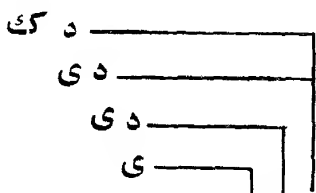
$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c}
 \text{د ک} \\
 \text{د ی} \\
 \text{د ی} \\
 \text{ی}
 \end{array} \\
 1 \quad 3 \quad 6 \quad 7 \quad 1 \quad / \quad 5 \quad 1 \quad 2 \quad \div \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 7 = 3 \quad 2 \quad 2 \\
 \quad \quad \quad 16 \quad 27 \quad 21 \\
 \quad \quad \quad | \\
 \quad \quad \quad - \text{د ی} (12) \quad \text{د ی} = 21 \times 4; 17 \times 2; 7 \times 3 \\
 \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \begin{array}{r}
 08 \quad 04 \quad 02 \quad 14 \quad 21 \\
 \text{د ی} = 8 + 3 + 1 = 12
 \end{array} \\
 13 \quad 10 \quad 18 \quad 9
 \end{array}$$

آخرین مرحله چیست؟ است که از تقسیم آخرین مقسوم فرعی، ۹، بر رقم ۴ از عدد ۳۲۲ به دست می آید.

باقیمانده:

پس از یافتن همه رقمهای خارج قسمت (که جواب مسئله است)، کار را برای پیدا کردن باقیمانده ادامه می دهیم. روش کلی برای مقسوم علیه های به طول دلخواه، شبیه آن است که در بخش مربوط به مقسوم علیه های سه رقمی گفته شد. این کار سه مرحله دارد:

۱. از «مرز» (خط مورب رسم شده در مقسوم) می گذریم و همچنان به شیوه عادی عمل می کنیم. عمل تفریق د ک را انجام می دهیم تا اولین عدد عمل در طرف باقیمانده (آن سوی خط مورب) به دست آید. عمل تفریق د ی نیز به طور عادی صورت می گیرد.



$$۱۳ \ ۶ \ ۷ \ ۱/۵ \ ۱ \ ۲ \div ۲۲۱۷ = ۳۲۴۲$$

$$۱۶ \ ۲۷ \ ۲۱ \ ۱۵$$

$$- (۱۴) دی - / (۵۸) ذک -$$

$$۱۳ \ ۱۰ \ ۱۸ \ ۹ \ ۱$$

$$دک = ۴۲ \times ۲$$

$$\underline{۵۸} \ \underline{۵۲}$$

$$دک = ۸$$

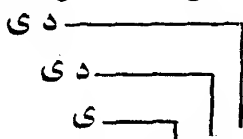
$$دی = ۲۱ \times ۲; ۱۷ \times ۲; ۷ \times ۲$$

$$\underline{۵۴} \ \underline{۵۲} \ \underline{۵۴} \ \underline{۲۸} \ \underline{۱۲}$$

$$دی = ۴ + ۶ + ۲ = ۱۲$$

این کار درست مثل قبل دنبال شد (در مرحله بعد تفاوتی که مربوط به باقیمانده است محسوس می شود). می بینید که عمل محاسبه د ک و د ی در مقسوم علیه و خارج قسمت، از چپ به راست پیش می رود. در این مرحله، رقم ۳ خارج قسمت ۳۲۴۲ به کار نرفت. چنانکه در زیر خواهیم دید، این حرکت از چپ به راست ادامه می یابد.

۲. با گذشتن از «مرز» اولین جنبه از دو جنبه خاص باقیمانده مطرح می شود. از اینجا تا پایان کار، دیگر محاسبه د ک نخواهیم داشت. به جای این کار، صرفاً مقسوم فرعی جدید را به بالا منتقل می کنیم تا بخشی از عدد عمل جدید را تشکیل دهد.



$$۱ \ ۳ \ ۶ \ ۷ \ ۱/۵ \ ۱ \ ۲ \div ۲۲۱۷ = ۳۲۴۲$$

$$۱۶ \ ۲۷ \ ۲۱ \ ۱۵ \ ۱۱$$

$$۱۳ \ ۱۰ \ ۱۸ \ ۹ \ ۱$$

۳. سرانجام، به دومین جنبه خاص باقیمانده می‌رسیم: در هر تفریق رو به پایین جدید، یکی از رقمهای خارج قسمت با شروع از سمت چپ، از کار کنار گذاشته می‌شود. توجه کنید که با این حرکت از چپ به راست، در هر مرحله، یک محاسبه دی حذف می‌شود. نمودار بالا را با نموداری که در زیر می‌بینید، مقایسه کنید.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \text{دی} \\
 \text{ی}
 \end{array}
 \overline{) 2217 = 3242} \\
 \begin{array}{r}
 13 \quad 6 \quad 7 \quad 1/5 \quad 1 \quad 4 \quad \div \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 7 = 3 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \\
 16 \quad 27 \quad 21 \quad 15 \quad 11 \\
 \downarrow \\
 \text{دی}(11) - \\
 \downarrow \\
 13 \quad 10 \quad 18 \quad 9 \quad 1 \quad 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{دی} = 17 \times 2; 7 \times 4 \\
 \begin{array}{r}
 02 \quad 14 \quad 28 \\
 \text{دی} = 03 + 08 = 11
 \end{array}
 \end{array}$$

چون دیگر تفریق د ک صورت نمی‌گیرد، عدد مقسوم فرعی را چنانکه در مرحله ۲ در بالا عمل شد، به بالا منتقل می‌کنیم. سپس چنانکه در مرحله ۳ دیدیم، رقم بعدی از طرف چپ را در خارج قسمت، از عمل کنار می‌گذاریم. این آخرین مرحله جواب است و چنانکه انتظار می‌رود، در پایان کار، رقم یکان (رقم سمت راست) مقسوم علیه را در رقم یکان خارج قسمت ضرب می‌کنیم. به این ترتیب حرکت از چپ به راست را ادامه داده‌ایم و اکنون، هم در مقسوم علیه و هم در خارج قسمت به «آخر خط» رسیده‌ایم:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \text{ی} \\
 \text{ی}
 \end{array}
 \overline{) 2217 = 3242} \\
 \begin{array}{r}
 13 \quad 6 \quad 7 \quad 1/5 \quad 1 \quad 4 \quad \div \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 7 = 3 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \\
 16 \quad 27 \quad 21 \quad 15 \quad 11 \quad 04 \\
 \nearrow \downarrow \text{ی}(04) - \\
 13 \quad 10 \quad 18 \quad 9 \quad 1 \quad 0 \quad 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{ی} = 7 \times 2 \\
 \begin{array}{r}
 14 \\
 \text{ی} = 04
 \end{array}
 \end{array}$$

آخرین عدد پیدا شده در محاسبه، باقیمانده است. در این مثال آخرین عدد، صفر است. پس تقسیم کامل است و باقیمانده‌ای ندارد.

این همه توضیحی که تا کنون برای تعیین یکایک رقمها در هر مرحله دادیم، ممکن است این روش تقسیم را دشوار جلوه گر سازد. اما واقعیت چنین نیست. چون هر قسمت کوچکی از کار را برای درک بهتر، تکرار کرده‌ایم، ظاهر عمل پیچیده به نظر می‌رسد. عملاً پس از درک کامل این روش، محاسبه سریع انجام می‌گیرد و واقعاً آسان خواهد بود. تنها دشواری واقعی، آن است که همواره نیز وجود دارد: لزوم دقت به خرج دادن در عمل. خطاهای ناشی از بی‌دقتی، خطری برای هر نوع محاسبه به شمار می‌آید. در عمل تقسیم به روش تراختنبرگ، باید مراقب باشیم که حاصل ضربهای جفتهای D درست را پیدا کنیم. بد نیست در اینجا سه دستوری را که در چند صفحه اخیر بیان شد تکرار کنیم. این دستورها نشان می‌دهند که چگونه رقمهای جواب را که برای تعیین حاصل ضربهای جفتهای D و D به کار می‌روند، مشخص کنیم.

۱. در هر مرحله، رقم جدید جواب را در دو رقم اول مقسوم علیه (مثلاً ۴۲ از عدد ۴۲۱۷) به طریقه D ضرب می‌کنیم.

۲. همان رقم جدید جواب را به طریقه D در دومین و سومین رقم مقسوم علیه (مثلاً ۲۱ در عدد ۴۲۱۷) ضرب می‌کنیم.

۳. سپس به سمت داخل پیش می‌رویم و سایر جفتهای D از مقسوم علیه را در رقمهای «قبلی» جواب ضرب می‌کنیم (چنانکه در ۴۲۱۷، دوبار به سمت داخل می‌رویم، اول به جفت ۱۷ و سپس به جفت D ناقص ۷ می‌رسیم).

شاید نمودارهای زیر که در آنها تنها مقسوم علیه و خارج قسمت مسئله اخیر ثبت شده، برای درک رابطه جفتهای D و D با هر رقم جدید از جواب که یافته شده (مراحل ۴ تا ۸) و تعیین باقیمانده (مراحل ۵ تا ۷) مفید واقع شود.

۱. د ک —————
 د ی —————
 ۲ ۲ ۱ ۷ = ۳

۲. د سی —————
 د ی —————
 د ی —————
 ۲ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲

۳. د ک —————
 د ی —————
 د ی —————
 ی —————
 ۲ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲ ۲

۴. د ک —————
 د ی —————
 د ی —————
 ی —————
 ۲ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲ ۲ ۲

۵. د ی —————
 د ی —————
 ی —————
 ۲ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲ ۲ ۲

۶.
$$\begin{array}{r} \text{د ی} \\ \text{ی} \\ ۲ \ ۲ \ ۱ \ ۷ = ۳ \ ۲ \ ۲ \ ۲ \end{array}$$

۷.
$$\begin{array}{r} \text{ی} \\ ۲ \ ۲ \ ۱ \ ۷ = ۳ \ ۲ \ ۲ \ ۲ \end{array}$$

ضمن کار با چند حاصل ضرب د ی باید مراقب بود. برای کاستن از خطر اشتباه و صرفه جویی در کار ذهنی، چنین عمل کنید: به محض یافتن هر حاصل ضرب د ی جدید، فوراً آن را از عدد عمل تفریق کنید و باقیمانده تفریق را به عنوان عدد عمل جدید که حاصل ضرب د ی بعدی از آن تفریق می شود به کار برید.

امتحان عمل تقسیم

تا اینجا دو روش تازه برای عمل تقسیم یاد گرفتیم، یکی روش «ساده» و دیگری روش «سریع». روش ساده کم و بیش «امتحان سر خود» است، ولی بخشی از آن جای یک امتحان نهایی دارد. روش سریع فقط تا حدی «امتحان سر خود» است. در این مورد روشی منظم و اصولی برای امتحان کردن جواب و باقیمانده، بخصوص برای باقیمانده، لازم داریم. احتمالاً، از بین روشهای گوناگون ممکن برای انجام امتحان، روشی که در زیر می آید، از همه طبیعی تر و راحت تر است. صورت دیگری از آن نیز در پایان این بخش آورده شده و هر کس می تواند بنا به میل خود تغییرات کوچکی در آن وارد کند، اما دستور کار توصیه شده شامل مراحل کلی زیر است:

۱. باقیمانده را از مقسوم تفریق می کنیم. مثلاً در یکی از مثالها، ۲۲۹۶ را بر ۶۲ تقسیم کردیم و جواب ۳۷، با باقیمانده ۲ به دست آمد. حالا این ۲ را از ۲۲۹۶ تفریق می کنیم. نتیجه، یعنی ۲۲۹۴ مقسوم تقلیل یافته‌ای است که اگر بر عدد ۶۲ این مثال تقسیم شود، باقیمانده نخواهد داشت.

۲. مجموع ارقام این مقسوم تقلیل یافته را مانند قبل با جمع کردن رقمهایش پیدا می کنیم. در این مثال، با عدد ۲۲۹۴ داریم ۲ بعلاوه ۲ بعلاوه ۹ بعلاوه ۴ می شود ۱۷. ارقام این مجموع را با هم جمع می کنیم تا عددی یک رقمی به دست آید: ۱ بعلاوه ۷ می شود ۸. مجموع ارقام ۸ است. همیشه مجموع ارقام را به همین شیوه به عدد یک رقمی تبدیل می کنیم.

۳. اکنون مجموع ارقام مقسوم علیه را، که در این مثال ۶۲ است، و مجموع ارقام جواب را که ۳۷ است پیدا می کنیم. سپس این دو مجموع ارقام را در یکدیگر ضرب می کنیم. به ازای ۶۲ مجموع ارقام ۸ و به ازای ۳۷ مجموع ارقام ۱۰ را که به ۱ تبدیل می شود، داریم. سپس این دو را در یکدیگر ضرب می کنیم. ۱ ضرب در ۸ می شود ۸ (در صورت لزوم، این حاصل ضرب باید به عدد یک رقمی تبدیل شود، اما اینجا ۸ خودش یک رقمی هست).

۴. این حاصل ضرب دو مجموع ارقام را که هم اکنون برابر با ۸ یافتیم، با مجموع ارقام مقسوم تقلیل یافته در بند ۲ مقایسه می کنیم. آن نیز ۸ بود. پس ۸ با ۸ برابر است و نتیجه امتحان مثبت در می آید. جواب و باقیمانده هر دو درست‌اند.

در یکی از مثالهای قبلی، تقسیم بدون باقیمانده در آمد؛ ۱۹۰۴ تقسیم بر ۳۴. این تقسیم را در زیر نوشته‌ایم و میزانها را هم داخل پرانتز آورده‌ایم:

$$\begin{array}{ccccccc} & & (2) & (77) & (7) & & (5) \\ 1904 & \div & 34 & = & 56 \end{array}$$

امتحان: ۷ ضرب در ۲ می شود ۱۴، و ۱ بعلاوه ۴ می شود ۵. این ۵ را با مجموع ارقام ۱۹۰۴ مقایسه می کنیم. آن هم ۵ است. پس جواب امتحان مثبت است.

این کار بر چه اساسی انجام می شود؟ در واقع در اینجا عمل معکوس، یعنی ضرب امتحان می شود. چنانکه دیدیم، ۱۹۰۴ تقسیم بر ۳۴ می شود ۵۶. بر عکس، می توانیم بگوییم که ۳۴ ضرب در ۵۶ می شود ۱۹۰۴. این حرف هم به همان معناست منتها در قالب ضرب.

$$\begin{array}{r} \text{عددها:} \quad 34 \times 56 = 1904 \\ \hline \text{مجموع ارقام:} \quad 7 \times 2 \\ 7 \times 2 = 14, (1 + 2) = 5 \end{array}$$

امتحان

وقتی باقیمانده داریم، قبل از امتحان کردن عمل باید فکری برای آن بکنیم. این کار با تفریق کردن آن از مقسوم انجام می شود:

$$\begin{array}{l} (۸) \quad (۲) \quad (۷, \text{پایین را ببینید}) \\ \text{مجموعه‌های ارقام:} \quad 63123257 \div 983 = 64212 \\ \text{عددها:} \quad 63123257 \div 983 = 64212 \\ \text{باقیمانده} \quad 895 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 63123257 - \\ \underline{895} \\ 63122362 \end{array}$$

۷ = مجموع ارقام

$$7 \longleftrightarrow 2 \times 8 = 16$$

$$7 \longleftrightarrow 16$$

صورت دیگری که پیشتر بدان اشاره کردیم، جنبه اختیاری دارد. با این حال، استفاده از آن موجب آسانی کار می شود زیرا عمل تفریق بالا، سمت راست را، که در آن ۸۹۵ را کم کردیم، حذف می کند. صورت مذکور چنین است:

۱. باقیمانده را از مقسوم، مثلاً ۸۹۵ را از ۶۳۱۲۳۲۵۷، تفریق نمی کنیم.
۲. به جای این کار، مجموع ارقام باقیمانده را می یابیم و آن را از مجموع ارقام مقسوم تفریق می کنیم (در صورت لزوم با ۹ جمع می کنیم تا تفریق امکانپذیر شود). در مثال اخیر، به ازای باقیمانده ۸۹۵، داریم ۸ بعلاوه ۵ می شود ۱۳، و ۱ بعلاوه ۳ می شود ۴. مجموع ارقام مقسوم می شود ۶ بعلاوه ۳ بعلاوه ۱ بعلاوه ۲ بعلاوه ۳ بعلاوه ۲ بعلاوه ۵ بعلاوه ۷ که می شود ۲۵، که داریم ۲ بعلاوه ۵ می شود ۷. اکنون باید ۴ (باقیمانده) را از ۲ (مقسوم) تفریق کنیم. چون این ۲ از حد مناسب کوچکتر است، آن را با ۹ جمع می کنیم، می شود ۱۱. به یاد داریم که در مجموعه های ارقام، نه ها به شمار نمی آیند. در این مورد همانند صفرند. پس ۴ را از ۱۱ تفریق می کنیم، حاصل می شود ۷.
۳. مثل گذشته، عددی برای مقایسه با ۷ به دست می آوریم. مجموع ارقام جواب را، که ۸ است، در مجموع ارقام مقسوم علیه، که ۲ است، ضرب می کنیم، نتیجه ۱۶ می شود. سپس ۱ بعلاوه ۶ می شود ۷.
۴. دو عددی را که در بندهای ۲ و ۳ پیدا کرده ایم، مقایسه می کنیم: ۷ با ۷ برابر است، پس نتیجه امتحان مثبت.

تمرینهای زیر را حل کنید:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| ۱. $۵۶۷۸ \div ۴۱$ | ۸. $۲۸۲۰۸ \div ۸۲$ |
| ۲. $۴۸۷۱ \div ۷۴$ | ۹. $۱۴۸۴۷ \div ۴۹$ |
| ۳. $۷۰۰۰۰۰ \div ۵۲$ | ۱۰. $۱۱۵۵۶ \div ۳۶$ |
| ۴. $۷۳۸۹ \div ۸۲$ | ۱۱. $۱۸۶۰۶ \div ۳۱$ |
| ۵. $۹۰۳۶ \div ۳۶$ | ۱۲. $۴۳۲۷۱ \div ۷۲$ |
| ۶. $۳۶۸۶۵ \div ۷۳$ | ۱۳. $۸۱۰۳۵ \div ۹۵$ |
| ۷. $۲۲۶۴۴ \div ۵۱$ | ۱۴. $۶۳۰۰۰ \div ۷۲$ |

۱۵. $۴۸۳۹ \div ۶۴$

۱۶. $۲۵۱۴ \div ۵۶$

۱۷. $۵۶۷۳ \div ۷۲$

۱۸. $۵۳۲۹ \div ۹۵$

۱۹. $۴۷۶۸ \div ۹۲$

۲۰. $۵۴۵۱ \div ۶۷$

۲۱. $۲۵۰۱ \div ۴۵$

۲۲. $۷۳۵۲ \div ۸۶$

۲۳. $۹۳۴۵ \div ۹۹$

۲۴. $۸۵۳۶۷ \div ۲۶$

۲۵. $۴۷۹۵۳۵ \div ۶۳$

۲۶. $۲۳۶۸۳۱ \div ۶۷۴$

۲۷. $۵۴۳۷۶۵ \div ۸۲۳$

۲۸. $۲۳۴۸۷۶ \div ۶۳۲$

۲۹. $۲۵۴۳۵۶ \div ۹۱۳$

۳۰. $۷۴۳۵۶۷ \div ۲۵۶$

۳۱. $۴۵۳۶۷۵۴ \div ۵۴۳$

۳۲. $۲۷۴۸۳۶۲۴ \div ۶۲۱۱$

۳۳. $۶۳۱۲۳۲۵۷ \div ۹۸۳۲$

جوابها:

د ک

ی

۱. $۵ \ ۶ \ ۷ \ ۸ \div ۴ \ ۱ = ۱ \ ۳ \ ۸$

$۱۶ \ ۳۷ \ ۲۸$

$۵ \ ۱۵ \ ۳۴(۲۵)$

د ک

ی

۲. $۴ \ ۸ \ ۷ \ ۱ \div ۷ \ ۲ = ۶ \ ۵$

$۴۷ \ ۶۱$

$۴۸ \ ۲۳(۶۱)$

د ک

ی

$$\begin{array}{r}
 ۳. \quad ۷ \ ۰ \ ۰ \ ۰ \ ۰ \div ۵ \ ۲ = ۱ \ ۳ \ ۲ \ ۶ \\
 \quad \quad ۲۰ \ ۳۰ \ ۲۰ \ ۱۰ \\
 \quad \quad ۷ \ ۱۸ \ ۲۲ \ ۳۲ \ (۸)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 ۴. \quad ۷ \ ۳ \ ۸ \ ۹ \div ۸ \ ۲ = ۹ \ ۰ \\
 \quad \quad ۰۸ \ ۰۹ \\
 \quad \quad ۷۳ \ ۰ \ (۹)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 ۵. \quad ۹ \ ۰ \ ۳ \ ۶ \div ۳ \ ۶ = ۲ \ ۵ \ ۱ \\
 \quad \quad ۲۰ \ ۰۳ \ ۰۶ \\
 \quad \quad ۹ \ ۱۸ \ ۳ \ (۰)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 ۶. \quad ۳ \ ۶ \ ۸ \ ۶ \ ۵ \div ۷ \ ۳ = ۵ \ ۰ \ ۵ \\
 \quad \quad ۰۸ \ ۳۶ \ ۰۵ \\
 \quad \quad ۳۶ \ ۳ \ ۳۶ \ (۰)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 ۷. \quad ۲ \ ۲ \ ۶ \ ۴ \ ۲ \div ۵ \ ۱ = ۴ \ ۲ \ ۲ \\
 \quad \quad ۲۶ \ ۲۴ \ ۰۲ \\
 \quad \quad ۲۲ \ ۲۲ \ ۲۰ \ (۰)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 ۸. \quad ۲ \ ۸ \ ۲ \ ۰ \ ۸ \div ۸ \ ۲ = ۳ \ ۲ \ ۲ \\
 \quad \quad ۲۲ \ ۲۰ \ ۰۸ \\
 \quad \quad ۲۸ \ ۳۶ \ ۳۲ \ (۰)
 \end{array}$$

کج

$$9. \quad 1 \ 4 \ 8 \ 4 \ 7 \div 4 \ 9 = 3 \ 0 \ 2$$

$$\quad \quad \quad 08 \ 14 \ 07$$

$$\quad \quad \quad 14 \ 1 \ 14 \ (0)$$

$$10. \quad 1 \ 1 \ 5 \ 5 \ 6 \div 3 \ 6 = 3 \ 2 \ 1$$

$$\quad \quad \quad 15 \ 05 \ 06$$

$$\quad \quad \quad 11 \ 7 \ 3 \ (0)$$

$$11. \quad 1 \ 8 \ 6 \ 0 \ 6 \div 3 \ 1 = 6 \ 0 \ 0$$

$$\quad \quad \quad 06 \ 00 \ 06$$

$$\quad \quad \quad 18 \ 0 \ 0 \ (6)$$

$$12. \quad 4 \ 3 \ 2 \ 7 \ 1 \div 7 \ 2 = 6 \ 0 \ 0$$

$$\quad \quad \quad 02 \ 07 \ 71$$

$$\quad \quad \quad 43 \ 0 \ 7 \ (71)$$

$$13. \quad 8 \ 1 \ 0 \ 3 \ 5 \div 9 \ 5 = 8 \ 5 \ 3$$

$$\quad \quad \quad 50 \ 33 \ 05$$

$$\quad \quad \quad 81 \ 50 \ 28 \ (0)$$

$$14. \quad 6 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \div 7 \ 2 = 8 \ 7 \ 5$$

$$\quad \quad \quad 60 \ 40 \ 00$$

$$\quad \quad \quad 63 \ 54 \ 36 \ (0)$$

$$15. \quad 4 \ 8 \ 3 \ 9 \div 6 \ 4 = 7 \ 5$$

$$\quad \quad \quad 43 \ 39$$

$$\quad \quad \quad 48 \ 35 \ (39)$$

د ک

ی

$$۱۶. ۲ \ ۰ \ ۱ \ ۴ \div ۵ \ ۶ = ۳ \ ۵$$

$$۲۱ \ ۵۲$$

$$۲۰ \ ۳۳(۵۲)$$

$$۱۷. ۵ \ ۶ \ ۷ \ ۳ \div ۷ \ ۲ = ۷ \ ۸$$

$$۶۷ \ ۶۳$$

$$۵۶ \ ۶۳(۵۷)$$

$$۱۸. ۵ \ ۳ \ ۲ \ ۹ \div ۹ \ ۵ = ۵ \ ۶$$

$$۶۲ \ ۰۹$$

$$۵۳ \ ۵۷(۹)$$

$$۱۹. ۲ \ ۷ \ ۶ \ ۸ \div ۹ \ ۲ = ۵ \ ۱$$

$$۱۶ \ ۷۸$$

$$۲۷ \ ۱۶(۷۶)$$

$$۲۰. ۵ \ ۲ \ ۰ \ ۱ \div ۶ \ ۷ = ۸ \ ۰$$

$$۱۰ \ ۲۱$$

$$۵۲ \ ۲(۲۱)$$

$$۲۱. ۲ \ ۰ \ ۰ \ ۱ \div ۲ \ ۵ = ۲ \ ۴$$

$$۲۰ \ ۲۱$$

$$۲۰ \ ۲۰(۲۱)$$

$$۲۲. ۷ \ ۳ \ ۰ \ ۲ \div ۸ \ ۶ = ۸ \ ۲$$

$$۵۰ \ ۸۲$$

$$۷۳ \ ۲۲(۷۸)$$

د کی

ی

$$۲۳. ۹ ۳ ۲ ۵ \div ۹ ۹ = ۹ ۲$$

$$۴۴ ۴۵$$

$$۹۳ ۴۳(۳۹)$$

$$۲۴. ۸ ۵ ۳ ۶ ۷ \div ۲۶ = ۳ ۲ ۸ ۳$$

$$۱۵ ۲۳ ۱۶ ۱۷$$

$$۸ ۷ ۲۱ ۸ (۹)$$

$$۲۵. ۲ ۷ ۹ ۵ ۳ ۵ \div ۶ ۳ = ۷ ۶ ۱ ۱$$

$$۳۹ ۱۵ ۱۳ ۴۵$$

$$۴۷ ۳۸ ۷ ۱۰(۴۲)$$

د کی

د ی

ی

$$۲۶. ۲ ۳ ۶ ۸ ۳ ۱ \div ۶ ۷ ۴ = ۳ ۵ ۱$$

$$۳۶ ۱۸ ۳۳ ۲۶۱$$

$$۲۳ ۳۴ ۹ ۲۶(۲۵۷)$$

$$۲۷. ۵ ۲ ۳ ۷ ۶ ۵ \div ۸ ۲ ۳ = ۶ ۶ ۰$$

$$۵۳ ۱۷ ۶۶ ۵۸۵$$

$$۵۴ ۵۰ ۶ ۵۸(۲۵۸)$$

$$۲۸. ۲ ۳ ۲ ۸ ۷ ۶ \div ۶ ۳ ۲ = ۳ ۷ ۱$$

$$۵۳ ۱۸ ۴۷ ۴۰۶$$

$$۲۳ ۴۵ ۱۰ ۴۰(۴۰۴)$$

د کی

د ی

ی

$$۲۹ \quad ۲ \quad ۰ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۵ \quad ۶ \div ۹ \quad ۱ \quad ۳ = ۲ \quad ۲ \quad ۳$$

$$۲۲ \quad ۲۳ \quad ۱۵ \quad ۷۶۶$$

$$۲۰ \quad ۲۲ \quad ۳۵ \quad ۷۶ \quad (۷۵۷)$$

$$۳۰. \quad ۷ \quad ۴ \quad ۳ \quad ۵ \quad ۶ \quad ۷ \div ۲ \quad ۵ \quad ۶ = ۲ \quad ۹ \quad ۰ \quad ۴$$

$$۲۲ \quad ۱۳ \quad ۱۵ \quad ۱۶ \quad ۱۴۷$$

$$۷ \quad ۲۳ \quad ۱ \quad ۱۱ \quad ۱۴ \quad (۱۴۳)$$

$$۳۱. \quad ۲ \quad ۵ \quad ۳ \quad ۶ \quad ۷ \quad ۵ \quad ۲ \div ۵ \quad ۲ \quad ۳ = ۸ \quad ۳ \quad ۵ \quad ۲$$

$$۲۳ \quad ۲۶ \quad ۳۷ \quad ۶۵ \quad ۵۳۲$$

$$۴۵ \quad ۱۹ \quad ۳۰ \quad ۲۷ \quad ۵۳ \quad (۵۳۲)$$

د کی

د ی

د ی

ی

$$۳۲.۲ \quad ۷ \quad ۴ \quad ۸ \quad ۳ / ۶ \quad ۲ \quad ۲ \div ۶۲۱۱ = ۲۲۲۲$$

$$۲۲ \quad ۲۸ \quad ۲۲ \quad ۷۶۶۲۲۶۱۶۲$$

$$۲۷ \quad ۲۶ \quad ۱۶ \quad ۳۱ \quad ۶۲۶۱۶ \quad (۶۱۶۰)$$

$$۳۳.۶ \quad ۳ \quad ۱ \quad ۲ \quad ۳ / ۲ \quad ۵ \quad ۷ \div ۹۸۳۲ = ۶۲۲۰$$

$$۵۱ \quad ۳۲ \quad ۱۳ \quad ۳۲ \quad ۱۸۵ \quad ۱۸۱۷$$

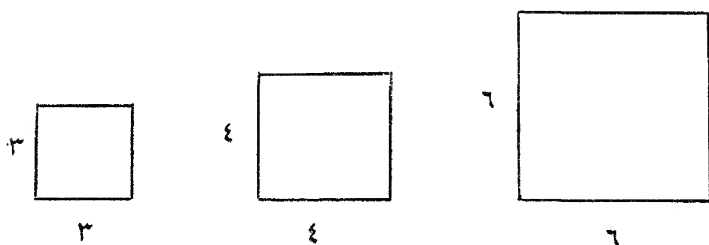
$$۶۳ \quad ۴۲ \quad ۲۰ \quad ۳ \quad ۱۸ \quad ۱۸۱ \quad (۱۸۱۷)$$

فصل ششم

جذر و مجذور

مقدمه

در شکل زیر سه مزرعه دیده می شود که در زمین همواری قرار گرفته اند، زیرا طول و عرض هر کدام چندین کیلومتر است. این مزرعه ها به شکل مربع کاملند زیرا خیالی هستند و می توانیم آنها را به هر شکلی اختیار کنیم:



مساحت این مزرعه ها چقدر است؟ اولی ۹ کیلومتر مربع مساحت دارد. زیرا هر ضلع آن ۳ کیلومتر است و ۳ ضرب در ۳ می شود ۹. به همین ترتیب، مساحت دومی ۱۶ کیلومتر مربع و مساحت سومی ۳۶ کیلومتر مربع است.

توجه کنید که در اینجا با عملی از حساب سرو کار داریم. در هر مورد، عددی را در خودش ضرب کرده ایم. به این عمل «مجدور کردن» عدد می گویند. با مجدور کردن ۳، عدد ۹ به دست می آید. این عمل ریاضی در مسئله های گوناگونی مطرح می شود. ساده ترین و معمولترین مورد مطرح شدن آن، موضوع یافتن مساحت مربع است که در بالا به آن اشاره کردیم. بدین سبب به طور عادی به این کار، مربع کردن عدد هم می گویند و نتیجه این کار را مربع عدد نیز می خوانند. مثلاً:

مجدور یا مربع عدد	عدد
۱	۱
۴	۲
۹	۳
۱۶	۴
.....
۲۲۵	۱۵
.....
۱۰۰۰۰	۱۰۰

پس می بینیم که مجدور کردن نوعی «عمل» ریاضی است. وقتی عددی را به عدد دیگر تبدیل می کنیم می گوئیم روی آن عمل کرده ایم. مثالهای ساده فراوانی هست که همه با آنها آشنا هستند، مثلاً دو برابر کردن. عدد ۱۲ را دو برابر می کنیم می شود ۲۴. شاید ساده ترین عمل، عملی باشد که با این دستور بیان می شود: «یکی زیاد کنید». اگر این عمل را روی ۱۲ انجام دهیم، می شود ۱۳، و الی آخر. در هر مورد کار را با عدد خاصی که مورد نظر است شروع می کنیم و در پایان عدد دیگری را می یابیم. از یک عدد به عدد دیگر می رسیم.

فرض کنید نتیجه عمل دو برابر کردن، مثلاً همین عدد ۲۴ بالا را اختیار می کنیم و عمل جدید «نصف کردن» را روی آن انجام می دهیم.

نصف ۲۴ را می گیریم و دوباره به همان ۱۲ اولیه می رسیم. دو برابر کردن و نصف کردن به این معنی، عملهای مخالف یکدیگر به شمار می آیند. می گوییم نصف کردن، «وارون» عمل دو برابر کردن است. وارون عمل «یکی زیاد کردن» چیست؟ مسلماً «یکی کم کردن». اگر این عمل را روی عدد ۱۳ که در بند قبل داشتیم، انجام دهیم دوباره به همان ۱۲ می رسیم.

عمل مجذور کردن هم وارون دارد. نام این وارون «جذر گرفتن» است. اگر بخواهیم جذر گرفتن را به صورت مسئله بیان کنیم، باید بگوییم «آن کدام عدد است که چون در خودش ضرب شود، عدد مفروض به دست می آید؟» چند مثال:

جذر عدد	عدد
۱	۱
۲	۴
۳	۹
.....
۱۵	۲۲۵
.....
۱۰۰	۱۰۰۰۰

در این فصل به هر دو عمل مجذور کردن و جذر گرفتن خواهیم پرداخت. مجذور کردن آسانتر است، از این رو اول آن را بیان می کنیم. ضمناً این کار در حکم آشنایی با عمل جذر گیری هم خواهد بود که به همان آسانی نیست ولی ارزش عملی بیشتری دارد. چنانکه خواهیم دید، مجذور کردن — ضرب عدد در خودش — خیلی شبیه روش ضرب سریع است که قبلاً آن را بررسی کرده ایم. در واقع این کار نوع خاصی از ضرب است. جذر گرفتن هم بیشتر به تقسیم شباهت دارد.

مجذور کردن

عددهای دو رقمی

پیدا کردن مجذور عددهای دو رقمی، مثل ۷۳، راحت است. این کار حتی به روش ضرب عادی هم زحمتی ندارد. می‌توانیم بگوییم ۷۳ ضرب در ۷۳ و روش ضرب سریع را که در یکی از فصلهای گذشته بیان شد به کار ببندیم:

$$\begin{array}{r} 73 \\ \times 73 \\ \hline 219 \\ 5110 \\ \hline 5329 \end{array}$$

اما اکنون روش سریعتر و راحت‌تری برای یافتن این نتیجه را شرح می‌دهیم. با وجود آسانی این روش، می‌توانیم آن را در سه مرحله بیان کنیم، زیرا دو مرحله اول به نوبه خود نکات جالبی هستند. این دو مرحله اول، دو نوع خاص از اعداد هستند به قرار زیر:

اعداد خاص نوع ۱: اینها عددهایی‌اند که به ۵ ختم می‌شوند، مثل ۳۵ و ۶۵. مجذور این گونه اعداد را فوراً می‌توان نوشت:

۱. دو رقم آخر مجذور، ۲۵ است. این گفته در مورد هر عددی از این نوع صادق است. مجذور ۳۵ عملاً ۱۲۲۵ در می‌آید. برای نوشتن مجذور آن، ابتدا ۲۵ را می‌نویسیم و جلوش جای حالی باقی می‌گذاریم: مجذور ۳۵، عدد ۲۵ - - می‌شود.

۲. برای یافتن دو رقمی که جلوی این ۲۵ قرار می‌گیرند، اولین رقم عدد مفروض را در رقم یکی بزرگترش ضرب می‌کنیم. در مورد ۳۵، اولین رقم ۳ است، پس ۳ را در ۴ ضرب می‌کنیم. حاصل ۱۲ می‌شود. این ۱۲ را جلوی ۲۵ می‌نویسیم. جواب ۱۲۲۵ در می‌آید. در مورد ۶۵، می‌توانیم آن را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\begin{array}{cccc}
 & 6 & & 5 \\
 & (6 \times 7) & & \downarrow \\
 \text{جواب :} & 4 & 2 & 2 & 5
 \end{array}$$

اعداد خاص نوع ۲: اینها اعدادیند که رقم دهگان‌شان ۵ است، مثل ۵۶. مجذور چنین اعدادی را هم فوراً می‌نویسیم:

۱. دو رقم آخر جواب، مجذور آخرین رقم عدد مفروض اند. در مورد ۵۶ داریم ۳۶ - -، زیرا ۶ ضرب در ۶ می‌شود ۳۶.
۲. دو رقم اول جواب عبارتند از ۲۵ بعلاوه آخرین رقم عدد مفروض. در مورد ۵۶، داریم ۲۵ بعلاوه ۶ که می‌شود ۳۱. این ۳۱ جلوی ۳۶ قرار می‌گیرد بنابراین جواب ۳۱۳۶ در می‌آید.
- اگر آخرین رقم عدد مفروض کوچک باشد، مثل آنچه در ۵۱ داریم، باز هم آن را مجذور می‌کنیم: ۱ ضرب در ۱ می‌شود ۱. اما چون این حاصل باید دو رقم آخر جواب را تشکیل دهد، ۱ را به صورت ۰۱ می‌نویسیم:

$$\begin{array}{cccc}
 & 5 & & 1 \\
 & (25 + 1) & & \downarrow \\
 & 2 & 6 & 0 & 1
 \end{array}$$

جواب ۲۶۰۱ است. جواب باید چهار رقمی در آید و به این ترتیب آن را به دست می‌آوریم.

شاید توجه کرده باشید که در اینجا می‌توانستیم، در صورت تمایل جواب را از چپ به راست بنویسیم. در این حالت‌های خاص هیچ گاه «ده بر یک» (یا بیست بر دو، و غیره) نخواهیم داشت. در مورد اعداد دیگر

همیشه وضع چنین نیست، اما در این نوع خاص از اعداد، رقمی به مرتبه بالاتر نقل نمی شود.

حالا به سراغ اعداد دو رقمی در حالت کلی می رویم که به هیچ نوع خاصی محدود نشده اند. با این حال هنوز می توانیم از دو جنبه انواع خاص استفاده کنیم:

۱. برای یافتن دو رقم آخر جواب، همچنان رقم آخر عدد مفروض را مجذور می کنیم (مثل یافتن ۲۵ - - برای ۳۵).

۲. برای پیدا کردن دو رقم اول جواب، همچنان باید مجذور رقم اول عدد مفروض را پیدا کنیم (مثل ۲۵ بعلاوه ۱ برای ۵۱).

سایر جنبه های اعداد خاص در اینجا به کار نخواهند آمد. در عوض، نکته تازه ای مطرح می شود. عدد دیگری به میان می آید:

۳. اکنون از «حاصل ضرب متوالی» استفاده می کنیم. این حاصل ضرب از ضرب کردن دو رقم عدد مفروض در یکدیگر به دست می آید. هنگام مجذور کردن ۳۴، حاصل ضرب متوالی ۱۲ است، زیرا ۳ ضرب در ۴ می شود ۱۲. حالا ببینیم از این عدد تازه چطور استفاده می شود. مجذور ۳۲ چقدر است؟

مرحله اول: مجذور ۳۲ را به این صورت می نویسیم: 32^2 . رقم ۲ ی کوچکی که در بالا نوشته شده، یعنی دو تا ۳۲ داریم که در یکدیگر ضرب می شوند. (همچنانکه می توانیم ۳۲ ضرب در ۳۲ ضرب در ۳۲ را به صورت 32^3 نشان دهیم، زیرا سه ۳۲ در هم ضرب می شوند). رقم سمت راست را مجذور می کنیم:

$$\begin{array}{r} 322 \\ \hline \end{array}$$

زیرا ۲ ضرب در ۲ می شود ۴

مرحله دوم: دو رقم عدد مفروض را در هم ضرب و حاصل را دو برابر می کنیم: ۳ ضرب در ۲ می شود ۶، دو برابرش می شود ۱۲:

$$\begin{array}{r} ۳۲۲ \\ \cdot ۲۲ \\ \hline \end{array}$$

این ۱۲ را به صورت ۲ می نویسیم و نقطه ای به نشانه ده بر یک کنارش می گذاریم. مجذور کردن خیلی شبیه ضرب است.

مرحله آخر: رقم سمت چپ عدد مفروض را مجذور می کنیم:

$$\begin{array}{r} ۳۲۲ \\ \cdot ۳۲۲ \\ \hline ۱۰۰۲۴ \end{array}$$

۳ ضرب در ۳ به علاوه ده بر یک، می شود ۶۵

جواب:

مجذور ۸۴ چقدر است؟

مرحله ۱:

$$\begin{array}{r} ۸۲۲ \\ \cdot ۸۲۲ \\ \hline \end{array}$$

۴ ضرب در ۴ می شود ۱۶

مرحله ۲:

$$\begin{array}{r} ۸۲۲ \\ \cdot ۸۲۲ \\ \hline ۶۵۶ \end{array}$$

۸ ضرب در ۴ می شود ۳۲، دو برابرش می شود ۶۴ به علاوه ده بر یک می شود ۷۵

مرحله ۳:

$$\begin{array}{r} ۸۲۲ \\ \cdot ۸۲۲ \\ \hline ۷۰۵۶ \end{array}$$

مجذور ۸ می شود ۶۴ به علاوه ۶ نقل شده، می شود ۷۰

بد نیست برای سرگرمی، تمام این کارها را در ذهن خود انجام دهیم. سراسر عمل را به طریقهٔ کاملاً ذهنی، بدون روی کاغذ آوردن محاسبات، حتی بدون نوشتن جواب، می‌توانیم انجام دهیم. کافی است قدری تمرکز داشته باشیم. با نگاه کردن به عدد مفروض، مثلاً همان ۳۲ قبلی، سه عدد دو رقمی را در ذهن تجسم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} ۳ \quad ۲ \\ \hline ۵۹ \quad ۱۲ \quad ۵۳ \end{array}$$

طبق معمول، جلوی هر عدد یک رقمی مثل ۴، صفری می‌گذاریم تا آن را به صورت عددی دو رقمی در آوریم.

این اعداد دو رقمی ۵۹، ۱۲ و ۵۴ از کجا پیدا می‌شوند؟ مسلماً این ۹، حاصل ۳ ضرب در ۳، و ۴ هم حاصل ۲ ضرب در ۲ است. عدد ۱۲ هم دو برابر ۳ ضرب در ۲ است. سپس این سه عدد دو رقمی را در ذهن خود به هم پیوند می‌زنیم:

$$\begin{array}{ccc} ۵(۹ & ۱)(۲ & ۵)۲ \\ \hline \text{جمع می‌کنیم} & & \text{جمع می‌کنیم} \end{array}$$

رقمهای داخل پرانتز را با یکدیگر جمع می‌کنیم: ۹ بعلاوهٔ ۱ می‌شود ۱۰، (صفر با یک نقطه)؛ ۲ بعلاوهٔ صفر می‌شود ۲. به جای هر پرانتز، مجموع رقمهای داخل آن را می‌گذاریم:

$$\begin{array}{ccc} ۵(۹ & ۱)(۲ & ۵)۲ \\ ۵ & ۰ & ۲ \quad ۲ \end{array}$$

یعنی ۱۵۲۶

حتی پس از حل چند تمرین و مسلط شدن به این روش می‌توانیم بدون

زحمت چندانی، از چپ به راست عمل کنیم. هنگام رفتن از چپ به راست، گاه رقمی باید به مرتبه بالاتر نقل شود (مثل ده بر یک)، همان طور که در مثال بالا ده بر یک داشتیم؛ در نتیجه، هنگام رفتن از چپ به راست باید برای هر رقمی که به مرتبه بالاتر نقل می شود، تصحیحی انجام دهیم. انجام این کار هیچ دشواری ندارد، زیرا تنها همین سه عدد دو رقمی را داریم که با هم پیوند می خورند، و با قدری تمرین خواهیم توانست آنها را به طور همزمان در ذهن خود نگاه داریم. در نتیجه، وقتی مانند مثال بالا به ده بر یک می رسیم، می گوئیم «۹» و بدون دردسر زیادی آن را به «۱۰» تغییر می دهیم.

شاید آسانترین راه، همان محاسبه حاصل ضرب متوالی و دو برابر کردن آن در مرحله اول، و سپس مجذور کردن دو رقم عدد مفروض باشد. در مثال بالا، احتمالاً بهترین راه این است که به ۳۲ نگاه کنیم و بگوئیم «۳ ضرب در ۲ می شود ۶، دو برابرش می شود ۱۲»، که عدد میانی است و بعد از این کار، بگوئیم «مجذور ۳ می شود ۹؛ مجذور ۲ می شود ۴». با داشتن تمرکز کافی، عملاً لازم نخواهد بود این چیزها را حتی در ذهن بگوئیم. شیوه درست کار این است که به ۳ نگاه کنیم و دریابیم که یک ۹ در ذهنمان نقش می بندد. به همین طریق، دیدن ۲ عدد ۴ را به ذهن می آورد. اما حاصل ضرب متوالی در ذهن اغلب اشخاص شامل دو مرحله مجزا است؛ حاصل آن بلافاصله در ذهن حاضر نمی شود مگر بعد از تمرینهای زیاد به همین علت به نظر می رسد بهتر باشد اول حاصل ضرب متوالی را حساب کنیم. البته در هر حال انتخاب این یا آن شیوه جنبه اختیاری دارد.

خودتان یک نمونه را امتحان کنید. جواب بلافاصله داده شده، اما برای آزمایش خود می توانید یک بار به عدد نگاه کنید و سر خود را برگردانید و قبل از نگاه کردن به جواب، محاسبه را به طور ذهنی انجام دهید. مجذور ۴۳ می شود ۱۸۴۹ که آن را به طریقه زیر پیدا می کنیم:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \\ \hline 16 \quad 24 \quad 09 \\ 1 \quad 8 \quad 2 \quad 9 \end{array}$$

دو برابر ۳ ضرب در ۴ می شود ۱۲

چند صفحه جلوتر، روش خاصی برای مجذور کردن اعدادی نظیر ۳۵ بیان کردیم. در اینجا می گفتیم «۳ ضرب در ۴ می شود ۱۲، همراه با ۲۵ می شود ۱۲۲۵». علت استفاده از ۴ این بود که یکی بیشتر از ۳ است. حالا ممکن است این سؤال پیش بیاید که آیا روش حاضر بر اساس حاصل ضرب متوالی برای اعدادی نظیر ۳۵ هم صادق است؟ البته که هست. خودتان امتحان کنید: عدد ۳۵ را به طور ذهنی با استفاده از سه عدد دو رقمی و پیوند زدن آنها مجذور کنید. جواب عمل مجذور کردن ۳۵، عدد ۱۲۲۵ خواهد بود که به راه محاسبه آن بستگی ندارد، و با روش فعلی به صورت زیر پیدا می شود:

$$\begin{array}{r} 3 \quad 5 \\ \hline 09 \quad 30 \quad 25 \\ 12 \quad 25 \end{array}$$

مدهای سه رقمی

فرض کنید می خواهیم مجذور ۴۶۲ را پیدا کنیم. روشی که برای اعداد دو رقمی ذکر شد، در اینجا هم قابل استفاده است:

۱. در اینجا هم می توانیم مجذور یکایک رقمها را به کار ببریم. حتماً به یاد دارید که در بخش قبل، برای مجذور کردن ۳۲، از یک ۹ (حاصل ۳ ضرب در ۳) و یک ۴ (حاصل ۲ ضرب در ۲) استفاده کردیم:

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \\ \hline 09 \quad 12 \quad 04 \\ 1 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \end{array}$$

۱۲، دو برابر ۳ ضرب در ۲ است

اکنون برای عدد سه رقمی ۴۶۲، از مجذور ۴ (یعنی ۱۶)، مجذور ۶ (یعنی ۳۶)، و مجذور ۲ (یعنی ۴) استفاده می‌کنیم.

۲. در اینجا هم حاصل ضرب متوالی را به کار می‌بریم و باز هم آن را دو برابر می‌کنیم. در مجذور کردن ۳۲، چنانکه در بالا دیدیم، یک ۱۲ داشتیم که دو برابر حاصل ضرب متوالی ۳ در ۲ بود. اکنون برای عدد سه رقمی ۴۶۲ هم از حاصل ضربهای متوالی استفاده می‌کنیم، ولی در اینجا چند حاصل ضرب متوالی داریم. در واقع به همه صورتهای ممکن جفت‌هایی از این سه رقم جدا می‌کنیم.

مرحله اول: موقتاً رقم ۴ را در ۴۶۲ نادیده می‌گیریم. فقط ۶۲ می‌ماند که عددی دو رقمی است. طرز مجذور کردن عددهای دو رقمی را می‌دانیم، پس به مجذور کردن این ۶۲ می‌پردازیم:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 6 \quad 2 \\ \hline 36 \quad 24 \quad 04 \end{array}$$

عددهای بالا را پیوند می‌زنیم: ۳ ۸ ۲ ۲

مرحله دوم: این مرحله تازگی دارد. در مورد اعداد دو رقمی چنین مرحله‌ای نداشتیم. یک «حاصل ضرب متوالی باز» با ضرب کردن اولین و آخرین رقم ۴۶۲ به دست می‌آوریم، یعنی ۴ و ۲ را در هم ضرب و حاصل را دو برابر می‌کنیم: ۴ ضرب در ۲ می‌شود ۸، و دو برابر ۸ می‌شود ۱۶. این عدد را مستقیماً به دو رقم سمت چپ عدد عمل اخیر، به صورت زیر می‌افزاییم:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 6 \quad 2 \\ \hline 36 \quad 24 \quad 04 \\ 5 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array}$$

۱۶ را می‌افزاییم: ۳۸ بعلاوه ۱۶ می‌شود ۵۴

توجه کنید که اینجا عددها را پیوند نزده‌ایم، بلکه یک عدد کلاً درون عدد دیگر وارد شده است.

آخرین مرحله: اکنون موقتاً رقم ۲ را در ۴۶۲ نادیده می‌گیریم و ۴۶ را مثل یک عدد دو رقمی معمولی مجذور می‌کنیم، با این تفاوت که مجذور ۶ را حذف می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 2 6 2 \\ \hline 16 28 5 4 4 2 \\ 2 1 3 4 4 4 \end{array}$$

۶ را مجذور نمی‌کنیم! یعنی جواب ۲۱۳۴۴۴ است

چه منطقی در پشت این کارها نهفته است؟ اگر به استخوانبندی این روش دقیق شویم می‌بینیم که این کارها کاملاً طبیعی است. برای مجذور کردن ۴۶۲، نخست ۶۲ را مجذور کردیم. سپس رقم ۲ از ۴۶۲ را نادیده گرفتیم و به مجذور کردن ۴۶ پرداختیم.

چون ۶۲ «بخش آخر» ۴۶۲ است، با مجذور کردن آن بخش آخر یا سمت راست جواب پیدا می‌شود. چون ۴۶ «بخش اول» ۴۶۲ است، بخش اول یا سمت جواب از آن به دست می‌آید. ولی چون ۴۶ و ۶۲ بخش مشترکی دارند، در وسط جواب تداخلی خواهیم داشت. به بیان دقیقتر:

۱. عدد ۴۶۲ فقط یک رقم ۶ دارد. پس باید فقط یک بار ۳۶ (مجذور ۶) را به کار ببریم: در مجذور کردن ۴۶، عدد ۳۶ را دیگر وارد نمی‌کنیم، زیرا قبلاً هنگام مجذور کردن ۶۲ در نظر گرفته شده است.

۲. یک جمله تازه داریم که در مجذور کردن ۴۶ یا ۶۲ مطرح نمی‌شود. این جمله «حاصل ضرب متوالی باز» است که از ضرب کردن اولین و

آخرین رقم ۴۶۲ در یکدیگر حاصل می شود. پس داریم ۴ ضرب در ۲ می شود ۸، و دو برابر این ۸، عدد ۱۶ است. این ۱۶ باید به وسط عدد افزوده شود، بنابراین ما هم آن را در سمت چپ مجذور ۶۲ افزودیم.

عملاً هنگام حل این گونه مسائل، توضیحات نوشته نمی شود و عمل فشرده تر صورت می گیرد. حاصل کار بیشتر به شکل زیر خواهد بود:

تنها رقمهایی را که زیرشان	۵	۲	۳	
خط کشیده شده می نویسیم	۴۵	۲۰	۰۴	
: حاصل پیوند عددها	۵	۲	۶	۰
دو برابر حاصل ضرب رقمهای ۳ و ۵			۰	۳
	۵	۲	۶	۳
	۵	۲	۶	۱۲
	۵	۲	۶	۰۹
: پیوند می زنیم	۵	۲	۶	۱۰۵

آیا به یاد دارید که در یکی از «دو نوع خاص» اعداد، که به ۵ ختم می شدند، یک ۲۵ داشتیم؟ اگر خود ۲۵ را می خواستیم مجذور کنیم می گفتیم ۲ ضرب در ۳ می شود ۶ (این ۳، عدد یکی بزرگتر از ۲ است)، و ۲۵ را به دنبالش می آوردیم: ۶۲۵. آیا اینجا هم می توانیم این کار را بکنیم؟ مسلماً. فقط باید یادمان باشد که اینجا چهار رقم لازم است، پس باید ۶۲۵ را به صورت ۰۶۲۵ بنویسیم:

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 2 \quad 5 \\
 \hline
 0 \quad 6 \quad 2 \quad 5 \\
 3 \quad 0 \\
 3 \quad 6 \quad 2 \quad 5 \\
 09 \quad 12 \quad 3 \quad 6 \quad 2 \quad 5 \\
 1 \quad 0 \quad 5 \quad 6 \quad 2 \quad 5
 \end{array}$$

دو برابر حاصل ضرب متوالی باز

: پیوند می زنیم

این تمرین را به طور ذهنی انجام دهید و غیر از جواب چیزی ننویسید. برای راحتی کار در اولین بار، عدد مقارنی را انتخاب کرده ایم:

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 2 \quad 2 \\
 \hline
 \end{array}$$

جواب چیست؟

حالا به جواب نگاه نکنید — که در پایین نوشته شده است. پس از آنکه خودتان عمل کردید، می توانید جوابتان را با آن مقایسه کنید:

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 2 \quad 2 \\
 \hline
 04 \quad 08 \quad 04 \\
 0 \quad 4 \quad 8 \quad 4
 \end{array}$$

: پیوند می زنیم

اکنون دو برابر حاصل ضرب متوالی ۲ در ۲ را اضافه می کنیم:

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 2 \quad 2 \\
 \hline
 \cancel{04} \quad \cancel{08} \quad 8 \quad 4 \\
 1 \quad 2 \quad 8 \quad 4 \\
 2 \quad 2 \quad 2 \\
 \hline
 04 \quad 08 \quad 1 \quad 2 \quad 8 \quad 4
 \end{array}$$

۲۲۲

: پیوند می زنیم $\quad 4 \quad 9 \quad 2 \quad 8 \quad 4$

مطالعه این مبحث مربوط به مجذور کردن اعداد، موجب آمادگی برای درک روش جذر گرفتن که اکنون به آن خواهیم پرداخت می شود. اما این روش، تکرار هیچ یک از مطالبی که قبلاً داشته ایم نیست. چنانکه خواهیم دید، این روش کاملاً با روشهای دیگر فرق دارد.

جذر

عددهای سه رقمی و چهار رقمی

وقتی عدد مفروضی به ما داده می شود، می دانیم که جذر آن عدد کوچکتری است با این ویژگی: اگر عدد کوچکتر را در خودش ضرب کنیم، عدد مفروض به دست می آید. با داشتن ۱۴۴، جذر آن را ۱۲ می یابیم، زیرا ۱۲ ضرب در ۱۲ می شود ۱۴۴. معنی «جذر» هم همین است.

اگر عدد مفروض مثل ۱۴۴ سه رقمی باشد، یا مثل ۱۵۲۴ چهار رقمی باشد، جذر آن دو رقمی خواهد بود (جذر ۱۵۲۴ می شود ۳۲). به همین علت، عددهای سه رقمی و چهار رقمی را که هر دو جذرهای دو رقمی دارند یکجا در نظر می گیریم.

مثال اول: جذر ۶۲۵ را پیدا کنید. معمولاً این مقدار را با علامت زیر، که رادیکال نام دارد، نشان می دهند:

$$\sqrt{625}$$

و آن را «جذر یا ریشه دوم ۶۲۵» می خوانند.

مرحله اول: از سمت راست، دو تا از رقمها را جدا می کنیم:

۶/۲۵

و کار را با رقم یا رقمهای واقع در طرف چپ این خط مورب شروع می کنیم. در این مثال کار را با رقم ۶ آغاز می کنیم. این یک اصل کلی است: خواه عدد سه رقمی باشد، خواه چهار رقمی، همواره دو رقم از کناره راست آن جدا می کنیم و آنچه را در طرف چپ خط مورب قرار گرفته، به کار می بریم (در مورد ۱۰۲۴، کار با ۱۰ شروع می شود زیرا داریم ۱۰/۲۴).

مرحله دوم: با استفاده از جدول ضرب که به خاطر سپرده ایم، بزرگترین رقمی را پیدا می کنیم که مجذورش از عددی که در مرحله اول یافته ایم بزرگتر نباشد. برای ۶، چه رقمی پیدا می شود؟ رقم ۲؛ زیرا ۲ ضرب در ۲ می شود ۴، ولی ۳ ضرب در ۳ می شود ۹. رقم ۳ را نمی توانیم اختیار کنیم، زیرا ۹ بزرگتر از عدد ۶ است که داریم. پس اولین رقم جواب ۲ است:

$$\sqrt{625} = 2$$

مرحله سوم: اولین رقم جواب را مجذور و حاصل را از ۶ تفریق می کنیم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{625} = 2 \\ \underline{4} \\ 2 \end{array}$$

مرحله چهارم: نصف عدد اخیر را می گیریم (نصف ۲ ی پائینی را)، و صفری به دنبال آن می گذاریم به طوری که به عدد ۱۰ برسیم. سپس این ۱۰ را بر اولین رقم جواب تقسیم می کنیم: ۱۰ تقسیم بر ۲ می شود ۵. این ۵، رقم دیگر جواب است:

$$\sqrt{۶۲۵} = ۲۵$$

$$\frac{۲}{۲}$$

اکنون دو رقم از جواب، یعنی ۲ و ۵، را داریم و می‌دانیم که جواب، عددی دو رقمی خواهد بود. آیا کار تمام است. نه، برای اینکه:

۱. باید درستی رقم آخر را که ۵ است بررسی کنیم. اینجا هم مثل آنچه در تقسیم پیش می‌آید، ممکن است رقمی از جواب از مقدار مناسب بزرگتر یا کوچکتر باشد. ممکن است لازم شود آنچه را نوشته‌ایم تصحیح کنیم. پس این ۵ که نوشته شده، هنوز رسمیت ندارد. در واقع این رقم فعلاً آزمایشی است و نهایی نیست.

۲. می‌خواهیم باقیمانده را هم پیدا کنیم. در اغلب موارد مثل آنچه در تقسیم دیدیم جواب «کامل در نمی‌آید» و باقیمانده‌ای وجود دارد. مقدار «باقیمانده» را که عبارت است از میزان زیادی عدد نسبت به عددی کوچکتر که بیش از همه به عدد مفروض نزدیک است و ضمناً جواب کامل (بدون باقیمانده) می‌دهد، می‌توانیم پیدا کنیم.

چون این وضع به تقسیم شباهت دارد، اگر دیدیم بقیه محاسبه یاد آور روش تقسیم فصل قبل است، تعجبی نخواهد داشت. در واقع این مرحله کاملاً شبیه آن بخش از تقسیم است که باقیمانده را تعیین می‌کردیم.

مرحله پنجم: جواب ۲۵ را که به دست آورده‌ایم در حالتی در نظر بگیرید که در عمل مجذور کردن نوشته می‌شود:

$$\begin{array}{r} ۲۵ \\ \hline ۵۴ \quad ۲۰ \quad ۲۵ \end{array}$$

۲۵ دو برابر حاصل ضرب ۲ و ۵ است

جفت سمت چپ را که اینجا ۵۴ است حذف می‌کنیم. تنها ۲۰ و ۲۵ را لازم داریم. آنها را پیوند می‌زنیم:

$$\underline{20} \ 25$$

$$2 \ 2 \ 5$$

صفر به علاوه ۲ می شود ۲

پس عمل جذرگیری را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\sqrt{6 \ 2 \ 5} = \begin{array}{r} 2 \ 5 \\ (2 \ 2 \ 5) \end{array}$$

در نظر گرفته شده

اولین رقم این عدد در نظر گرفته شده، یعنی رقم ۲ را که زیرش خط کشیده شده، از عدد عمل (۲ ی پایینی) کم می کنیم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{6 \ 2 \ 5} = \begin{array}{r} 2 \ 5 \\ (2 \ 2 \ 5) \end{array} \\ \underline{2} \ 0 \\ 2 \end{array}$$

مثل تقسیم، این پیکان یعنی تفریق کردن

رقم ۲ که زیرش خط کشیده شده است

مرحله آخر: دو رقم آخر عدد مفروض را پایین می آوریم. با تفریق
 اخیر یک صفر پیدا شد. بعد از این صفر، رقمهای ۲ و ۵ از عدد ۶۲۵ را
 پایین می آوریم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{6 \ 2 \ 5} = \begin{array}{r} 2 \ 5 \\ (2 \ 2 \ 5) \end{array} \\ \underline{2 \ 0} \ 2 \ 5 \\ 2 \end{array}$$

از این ۵۲۵، که در موارد دیگر می تواند عدد دیگری باشد، بقیه
 عدد «در نظر گرفته شده» را تفریق می کنیم. رقم ۲ از عدد ۲۲۵ را که
 زیرش خط کشیده شده، قبلاً به کار برده ایم. اکنون ۲۵ را که باقی
 مانده است، به کار می بریم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{6 \ 2 \ 5} = 2 \ 5 \\ \underline{2 \ 0 \ 2} \quad (2 \ 2 \ 5) \\ 2 \ 0 \ 0 \end{array}$$

باقیمانده صفر است

این جذرگیری کامل در آمد و باقیمانده ندارد. جذر ۶۲۵، عدد ۲۵ است.

مثال دوم: جذر ۶۵۴ را پیدا کنید. این عمل کامل نخواهد بود و در اینجا باقیمانده خواهیم داشت.

مرحله اول: دو رقم را جدا می کنیم: $6/54$

مرحله دوم: اولین رقم جواب را به دست می آوریم. برای این منظور بزرگترین عددی را اختیار می کنیم که مجذورش از ۶ بیشتر نباشد:

$$\sqrt{6 \ 2 \ 5} = 2$$

مرحله سوم: مجذور این عدد را تفریق می کنیم (۲ ضرب در ۲ می شود ۴):

$$\begin{array}{r} \sqrt{6 \ 2 \ 5} = 2 \\ \underline{4} \\ 2 \end{array}$$

مرحله چهارم: نصف این رقم، یعنی ۲ پایینی را می گیریم و صفری به دنبالش می آوریم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{6 \ 2 \ 5} = 2 \\ \underline{4} \\ 2 \\ (10) \end{array}$$

این ۱۰ را بر رقمی از جواب که یافته‌ایم تقسیم کردیم: ۱۰ تقسیم بر ۲ می‌شود ۵. این رقم، دست کم به طور آزمایشی، رقم دوم جواب است:

$$\begin{array}{r} \sqrt{6 \ 4 \ 5} = 2 \ 5 \\ 4 \\ \hline 2 \end{array}$$

مرحله پنجم (باقیمانده و امتحان عمل): با استفاده از جوابی که در بالا یافتیم، دومین و سومین جفت ارقامی را که در مجذور کردن هم داریم، تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{6 \ 4 \ 5} = 2 \ 5 \\ 4 \ 0 \qquad (44 \ 20 \ 25) \\ \hline 2 \qquad (2 \ 2 \ 5) \end{array} \quad \text{پیوند می‌زنیم}$$

سپس ۲ را که زیرش خط کشیده شده تفریق می‌کنیم. اکنون ۴۵ را پایین می‌آوریم و ۲۵ را که در ۲۲۵ داریم از آن تفریق می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{6 \ 4 \ 5} = 2 \ 5 \\ 4 \ 0 \ 2 \ 5 \qquad (20 \ 25) \\ \hline 2 \ 2 \ 5 \qquad (2 \ 2 \ 5) \\ \hline 2 \ 0 \end{array} \quad \text{باقیمانده ۲۰ است}$$

پس مقدار جذر ۲۵ و باقیمانده ۲۰ به دست آمد. این باقیمانده «پذیرفتنی» است زیرا از جواب، که ۲۵ شد، کمتر است. اما همیشه چنین نیست.

مثال سوم: در این مثال، باقیمانده پذیرفتنی نیست:

$$\begin{array}{r} \sqrt{6 \ 7 \ 6} = 2 \ 5 \\ 4 \ 0 \ 7 \ 6 \quad (20 \ 25) \\ \underline{2 \ 2 \ 5} \quad (2 \ 2 \ 5) \\ 5 \ 1 \end{array}$$

باقیمانده ۵۱ است

همه مراحل کار تا رسیدن به این باقیمانده عیناً مانند مثال قبلی بود. ولی حالا باقیمانده ۵۱ شده است. در جذرگیری، قاعده بر این است که: باقیمانده نباید از دو برابر جواب بیشتر باشد. در اینجا باقیمانده، یعنی ۵۱ از دو برابر جواب، که ۲۵ است بزرگتر است. پس معلوم می شود که رقم ۵ در جواب از حد مناسب کوچکتر است. شاید بهتر باشد به جای آن ۶ بگیریم، یعنی جواب به جای ۲۵، عدد ۲۶ باشد. حالا این را امتحان می کنیم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{6 \ 7 \ 6} = 2 \ 6 \\ 4 \ 0 \ 7 \ 6 \quad (24 \ 36) \\ \underline{2 \ 7 \ 6} \quad (2 \ 7 \ 6) \\ 0 \ 0 \end{array}$$

حالا وضع فرق می کند!
باقیمانده صفر است

پس به ازای ۲۶، عمل کامل است و باقیمانده ندارد. می گوئیم جذر ۶۷۶ دقیقاً ۲۶ است.

مثال چهارم: جذر ۲۲۰۰ را پیدا کنید:
مرحله اول: ۲۲/۰۰

مرحله دوم:

$$\sqrt{2200} = 4$$

زیرا ۴ ضرب در ۴ می شود ۱۶،
ولی ۵ ضرب در ۵ می شود ۲۵ که زیاد است

مرحله سوم:

$$\sqrt{2200} = 4$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\sqrt{2200} = 47$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \hline 6 \end{array}$$

(۳۰)

مرحله چهارم:

۳۰ تقسیم بر ۴ می شود ۷

مرحله پنجم (باقیمانده و امتحان):

$$\begin{array}{r} \sqrt{2200} = 47 \\ 1600 \\ \hline 600 \end{array} \quad \begin{array}{l} 49 \\ (X \ 56 \ 49) \\ (\underline{6} \ 0 \ 9) \end{array}$$

تفریق ممکن نیست! لابد رقم ۷ بزرگتر از مقدار مناسب است، زیرا
نمی توانیم ۹ را از صفر تفریق کنیم. پس جواب را به ۴۶ تبدیل می کنیم و
آن را می آزمایشیم:

کار در مرحله تفریق متوقف می شود، زیرا عدد ۶ را که زیرش خط کشیده شده نمی توانیم از عدد عمل که ۵ است کم کنیم. بنابراین رقم ۶ برای جواب زیاد است. این بار ۵۵ را امتحان می کنیم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{3025} = 55 \\ \underline{25} 02 5 \\ 5 \underline{2} 5 \\ 0 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (55 \ 50 \ 25) \\ (\underline{5} \ 2 \ 5) \end{array}$$

باقیمانده صفر است

عمل جذرگیری کامل است: جذر ۳۰۲۵ دقیقاً ۵۵ است.

اعداد پنج رقمی و شش رقمی

این دو حالت را یکجا در نظر می گیریم زیرا در هر دو جوابهای سه رقمی به دست می آید. مثلاً جذر ۸۸۲۴۶ می شود ۲۹۶ و جذر ۶۷۴۵۸۹ عدد ۸۲۱ است. هر دوی این جوابها سه رقمی اند. در هر مورد، باقیمانده ای هم داریم.

از لحاظ منطقی اکنون وقت آن است که درباره تعداد رقمهای جذر هر عدد صحبت کنیم. پیش از آنکه هیچ رقمی از جواب را بیابیم، می توانیم بگوییم که جذر مطلوب چند رقمی خواهد بود. تعداد رقمهای جواب تقریباً نصف تعداد رقمهای عدد مفروض است. به عبارت دقیقتر:

۱. اگر عدد مفروض شامل تعداد زوجی از ارقام باشد (مثل ۶۷۴۵۸۹ که شش رقم دارد، و شش هم عدد زوجی است)، آنگاه جذرش دقیقاً نصف این تعداد رقم خواهد داشت.

۲. اگر عدد مفروض شامل تعداد فردی از ارقام باشد (مثل ۶۲۵ که سه رقم دارد، و سه فرد است)، آنگاه یکی به تعداد ارقام می افزاییم تا

زوج شود، مثلاً سه را به چهار تبدیل می کنیم، و نصف آن را می گیریم (نصف چهار می شود دو، پس جذر ۶۲۵ عددی دو رقمی خواهد بود).

عین همین نتیجه را می توانیم به روشی عملی، حتی بدون شمارش رقمها به دست آوریم. برای این منظور باید رقمها را دو تا دو تا از سمت راست جدا کنیم. با داشتن عدد ۶۷۴۵۸۹ پیش از شروع به یافتن جذر آن، می توانیم آن را به این صورت تفکیک کنیم: $۶۷/۴۵/۸۹$. اینجا سه دسته عدد داریم، پس در جواب سه رقم خواهیم داشت. حالا فرض کنید عدد ۸۸۲۴۶ را داریم. آن را به صورت $۸/۸۲/۴۶$ دسته بندی می کنیم و باز هم سه دسته رقم داریم. اینکه یکی از دسته ها تنها شامل یک رقم ۸ است، تأثیری در کار ندارد. بنابراین باز هم انتظار داریم به جواب سه رقمی برسیم، که البته هم می رسیم زیرا جواب ۲۹۶ است.

مزیت جدا کردن رقمها در دسته های دوتایی از سمت راست، این است که بیش از معلوم کردن تعداد رقمهای جواب فایده دارد. با این کار مرحله اول روش مورد بحث نیز انجام می شود. در این مرحله، یک یا دو رقم سمت چپ را که تعیین کننده اولین رقم جواب است، مشخص می کردیم. به ازای ۸۸۲۴۶، اولین مرحله، مشخص کردن این مطلب است که ۸ اولین دسته ای است که باید با آن کار کنیم. سپس رقمی را پیدا می کنیم که مجذورش بزرگترین عددی است که از ۸ تجاوز نمی کند. این رقم ۲ است. اولین رقم ۳ نیست، زیرا ۳ ضرب در ۳ می شود ۹، و ۹ از ۸ بزرگتر است. پس اولین رقم جواب ۲ است. توجه می کنید که تفکیک رقمها لازم است، زیرا باید مراقب باشیم که اشتباهاً ۸۸ را در مرحله اول به کار نبریم. با این کار، به جای ۲ به رقم ۹ می رسیم: مجذور ۹، عدد ۸۱ است، که از ۸۸ بزرگتر نیست. تا هنگامی که رقمها را از راست دو تا دو تا جدا می کنیم، خطر بروز چنین اشتباهی در میان نیست.

هر سه رقم جواب را برای مواردی که ذکر شد، بر اساس آنچه تا کنون گفته شده می توان یافت. در اینجا هم همان مطالبی مطرح می شود که در بخش قبل برای کار با عددهای سه رقمی و چهار رقمی مطرح بود.

تنها یک نکته تازه در بخش آخر محاسبه که می‌خواهیم باقیمانده را پیدا کنیم، وارد کار می‌شود. این بخش برای عمل لازم است زیرا درست یا نادرست بودن آخرین رقم جواب را معلوم می‌کند. گاه پیش می‌آید که مجبوریم به عقب برگردیم و آخرین رقم را یکی کم کنیم. با این حال توجه کنید که روال کار در آغاز چقدر شبیه قبل است:

مثال ۱: می‌خواهیم جذر ۲۰۷۹۳۶ را پیدا کنیم. رقمهایش را دوتا دوتا جدا می‌کنیم $۳۶ / ۷۹ / ۲۰$. کار را با ۲۰ شروع می‌کنیم و جواب سه رقمی خواهد بود.

اولین رقم جواب: ۴ ضرب در ۴ کمتر از ۲۰ است، ولی ۵ ضرب در ۵ بیشتر از ۲۰ است. پس اولین رقم مطلوب ۴ است:

$$\begin{array}{r} \sqrt{207936} = 4 \\ \underline{16} \\ 4 \end{array}$$

(۲۰)

نصف ۴ می‌شود ۲ ، صفری کنارش می‌گذاریم

دومین رقم جواب: این ۲۰ را به ۴ تقسیم می‌کنیم، حاصل ۵ است:

$$\begin{array}{r} \sqrt{207936} = 45 \\ \underline{16} \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ \times 4 \\ \hline 200 \\ \times 5 \\ \hline 225 \end{array}$$

این همان شیوه مجذور کردن است که قبلاً داشتیم. عدد ۴۵ هم دو برابر ۴ ضرب در ۵ است، و ۲۵ مجذور ۵ است. در مجذور کردن، سه تا از این عددهای دو رقمی داریم که با هم پیوند می‌خورند، ولی در این روش جذرگیری فقط دو تای آخر آنها به کار می‌آید. البته علت این کار آن است که اولین عدد از این اعداد دو رقمی قبلاً به کار رفته است. این عدد

باید مجذور ۴ یعنی ۱۶ می بود و در اولین مرحله بالا، ۱۶ را تفریق کرده ایم.

آخرین رقم جواب: این رقم ۴ در عدد ۴۲۵ را ضمن بالا رفتن، و رقم ۲ در ۴۲۵ را هنگام پایین آمدن، به صورت زیر تفریق می کنیم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{2 \ 0 \ 7 \ 9 \ 3 \ 6} = 2 \ 5 \\ 1 \ 6 \ 0 \ 7 \\ \underline{ } } \\ 2 \ 5 \end{array}$$

(۲ یا ۳)
(۲۰ یا ۳۰)

برای اختیار کردن نصف عدد فردی مثل این ۵، نمی دانیم که باید «نصف کوچکتر» یا «نصف بزرگتر» یعنی ۲ یا ۳، را به کار ببریم. بهترین کار این روش بینابینی است که تفاضل را خُرد کنیم. بعد از افزودن صفر، ۲۰ یا ۳۰ داریم و نمی دانیم استفاده از کدام یکی بهتر است. البته در نهایت به خطا نخواهیم رفت، زیرا نادرستی حدسی که در این مرحله زده شود، حتماً بزودی روشن خواهد شد. اما طبیعی ترین کار، که اغلب از هر شیوه دیگری سراسر است تر هم هست، این است که تفاضل را خُرد کنیم. به جای ۲۰ یا ۳۰، میانگین ۲۵ را می گیریم. این عدد را بر اولین رقم جواب مطلوب تقسیم می کنیم: ۲۵ تقسیم بر ۴ می شود ۶ که آخرین رقم جواب است:

$$\begin{array}{r} \sqrt{2 \ 0 \ 7 \ 9 \ 3 \ 6} = 2 \ 5 \ 6 \\ 1 \ 6 \ 0 \ 7 \\ \underline{ } } \\ 2 \ 5 \end{array}$$

(۲۵)

هر سه رقم جواب را داریم. توجه کنید که تا اینجا از هیچ شیوه دیگری غیر از شیوه های مربوط به عددهای کوتاهتری که جوابهای دو رقمی داشتند، استفاده نکرده ایم. موضوع خرد کردن تفاضل هم صرفاً به طور تصادفی در این مثال مطرح شد، چنانکه می تواند در مورد عددهای کوتاهتر یا بلندتر نیز مطرح شود.

اما حالا به قسمت «باقیمانده و امتحان» محاسبه می رسیم. در اینجا یک موضوع تازه به میان خواهد آمد. البته حتی این هم کاملاً تازه نیست، بلکه صرفاً در محاسبه جذر تازگی دارد. قبلاً در روش مجذور کردن نیز، آن را داشتیم. این موضوع، استفاده از «حاصل ضرب متوالی باز» است که در آن، اولین و آخرین رقمهای جواب سه رقمی را در یکدیگر ضرب می کنیم. در مورد ۴۵۶، دو رقم ۴ و ۶ را در هم ضرب می کنیم. طبق معمول همه این حاصل ضربهای متوالی، نتیجه را باید دو برابر کنیم: دو برابر ۴ ضرب در ۶ می شود ۴۸.

$$\begin{array}{r} \sqrt{207936} = 456 \\ \underline{1607} \\ 45 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 456 \\ \times 456 \\ \hline 2736 \\ 2272 \\ 1824 \\ \hline 207936 \end{array}$$

ادامه مطلب را بخوانید

این ۶۳۶ صورت پیوند خورده حاصل ضرب متوالی ۵۶ است. طبق شیوه معمول در جذرگیری اولین عدد از سه عدد دو رقمی را که در مجذور کردن داشتیم حذف می کنیم: مجذور ۵ را حذف می کنیم (آن را قبلاً در نظر گرفته ایم) بنابراین:

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 56 \\ \hline 36 \\ 280 \\ \hline 3136 \end{array}$$

صورت همیشگی حاصل ضرب متوالی مورد نظر است.

پس از آنکه مقداری تمرین کردیم، این حاصل ضرب متوالی را باید همواره ذهنی حساب کنیم. این کار بسیار راحت است. لزومی ندارد که واقعاً بنویسیم ۵ ضرب در ۶، می شود ۳۰، دو برابرش ۶۰ است؛ ۶۰۳۶ به صورت ۶۳۶ پیوند می خورد. همه اینها براحتی در ذهن انجام می شود. اما فراموشکار نباشید و دو برابر کردن یادتان نرود!

باقیمانده و امتحان: پس از یافتن جواب، بی درنگ می توانیم بقیه رقمهای مانده از عدد مفروض را یکجا پایین بیاوریم، مثل آنچه در زیر می بینید:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{207936} = 456 \\
 \underline{160719} \quad \quad \quad \cancel{4} \cancel{4} 5 \\
 45 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{48} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 636
 \end{array}$$

رقمهای ۴ و ۲ در ۴۲۵ را خط می زنیم زیرا قبلاً آنها را برای تفریق از عدد عمل به کار برده ایم. اکنون رقم ۴ از حاصل ضرب متوالی ۴۸ را که زیر آن خط کشیده ایم به طوری که پیکانها نشان می دهند به کار می بریم. با گفتن اینکه «۵ منهای ۴ می شود ۱» رقم ۴ از عدد ۴۸ را هم خط می زنیم، دیگر با آن کاری نداریم. چه باقی می ماند؟ فقط رقمهای زیر:

$$\begin{array}{c}
 5 \\
 8 \\
 636
 \end{array}$$

حالا ستون عمودی را جمع می زنیم: ۵ بعلاوه ۸ بعلاوه ۶ می شود ۱۹:

$$\begin{array}{c} 5 \\ 8 \\ 6 \\ 1936 \end{array}$$

این نتیجه را که ۱۹۳۶ است از کل عدد عمل باقیمانده تفریق می کنیم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{207936} = 456 \\ \underline{1936} \\ 1936 \\ \underline{} \\ 00 \end{array}$$

باقیمانده صفر است

مسئله بدون باقیمانده در آمد. جذر ۲۰۷۹۳۶ دقیقاً ۴۵۶ است.

مثال ۲: عمل جذرگیری از عدد ۸۹۳۳۰۴ با توضیحاتی کلی، در زیر آمده است:

$$\begin{array}{r} \sqrt{893304} = 94 \\ \underline{8113} \quad \quad \quad (72 \quad 16) \\ 8 \quad \quad \quad \cancel{736} \\ (40) \end{array}$$

رقم ۷ را هم اکنون، پس از به کار بردنش در تفریق از ۸ هنگام بالا رفتن، خط زدیم. سپس ضمن پایین آمدن، رقم ۳ در ۷۳۶ را تفریق می کنیم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{893304} = 945 \\ \underline{8113} \quad \quad \quad \cancel{736} \\ 810 \quad \quad \quad \cancel{736} \\ (50) \end{array}$$

رقم ۵ جواب از تقسیم ۵۰ بر ۹ (۹ متعلق به ۹۴) به دست می آید. حالا که کل جواب را داریم. حاصل ضربهای متوالی را حساب می کنیم و بقیه رقمهای عدد مفروض را یکجا پایین می آوریم:

[illegible]

باقیمانده ۲۷۹ است. جواب قابل قبول است. بدین معنا که هیچ جا به تناقضی برخوردیم. هیچ موردی پیش نیامد که خواسته باشیم عددی را از عدد کوچکتر تفریق کنیم، و باقیمانده یعنی ۲۷۹ از جواب که ۹۴۵ در آمده، کوچکتر است. همه چیز پذیرفتنی است. پس می‌توانیم بگوییم جواب درست است.

تمرینهایی برای حل

در اینجا تمرینهایی برای حل داده شده که بخصوص اگر آنها را به ترتیبی که داده شده اند حل کنید، برایتان جالب خواهند بود. تمرینها از آسان شروع و رفته رفته دشوارتر می شوند. جوابها پس از آخرین تمرین آورده شده اند. توجه به نکات زیر کارتان را در حل این تمرینها راحت تر خواهد کرد:

۱. وقتی مقسوم فرعی فرد در آمد، چنانکه پیشتر گفته شد «تفاضل را خُرد می کنیم». مثلاً اگر ۷ داریم و می خواهیم نصف آن را اختیار

کنیم، ۳ یا ۴ را خواهیم داشت. با افزودن صفری طبق روال همیشگی، ۳۰ یا ۴۰ را داریم که باید بر اولین رقم جواب تقسیم شود (تا رقم بعدی جواب به دست آید). کدام یکی را به کار می‌بریم، ۳۰ یا ۴۰ را؟ هیچ کدام. بلکه ۳۵ را به کار می‌بریم.

۲. وقتی مقسوم فرعی صفر شد، رقم ۱ (و نه صفر) را به عنوان رقم بعدی جواب آزمایش می‌کنیم. این کار معمولاً موجب صرفه‌جویی در وقت می‌شود.

۳. هر وقت ضمن تقسیم کردن بر اولین رقم جواب، ۱۰ به عنوان رقم بعدی جواب پیدا شد، بلافاصله آن را به ۹ کاهش می‌دهیم. مسلماً ۱۰ قابل قبول نیست. حتی ممکن است رقم ۸ مناسب باشد.

۴. نکته مهمی که در موارد متعددی پیش می‌آید این است که اگر باقیمانده از دو برابر جواب بیشتر شد، باید جواب را افزایش دهیم. قاعدتاً این کار باید امکان‌پذیر باشد.

در چند مثال زیر، جذر اعداد داده شده را بیابید

۱. ۷۶۵	۵. ۷۸۸۸	۸. ۱۰۳۲۵۶
۲. ۹۶۵	۶. ۴۵۶۹	۹. ۳۶۴۷۲۸
۳. ۲۰۰	۷. ۴۶۵۰۰	۱۰. ۹۰۰۰۴۵
۴. ۶۸۳		

جوابها:

این تمرینها به طریقه عملی حل شده‌اند؛ یعنی تا حد زیادی به همان صورت که عملاً حل می‌شوند ثبت شده‌اند و تنها برخی توضیحات به آنها افزوده شده است. عملاً در این مسائل بخشی از آنچه در اینجا آورده شده، پس از قدری تمرین، می‌تواند حذف شود:

$$\begin{array}{r}
 ۱۰. \sqrt{۷ \ ۶ \ ۵} = ۲ \ ۷ \\
 \underline{۲ \ ۰۶ \ ۵} \quad (۲۷ \ ۲۹) \\
 \quad \underline{۲ \ ۹} \quad \quad ۳ \ ۲ \ ۹ \\
 ۳ \ ۳ \ ۶ \text{ باقیمانده } ۳۶ \text{ است} \\
 (۱۵)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 ۲۰. \sqrt{۹ \ ۶ \ ۵} = ۳ \ ۱ \\
 \quad \quad \quad (۰۶ \ ۰۱) \\
 \underline{۹ \ ۰۶ \ ۵} \quad \quad ۰ \ ۶ \ ۱ \\
 \quad \underline{۶ \ ۱} \\
 ۰ \quad \quad ۲ \quad \text{باقیمانده}
 \end{array}$$

نکته ۲ی بالا را ببینید.

$$\begin{array}{r}
 ۳۰. \sqrt{۲ \ ۰ \ ۰} = ۱ \ ۴ \\
 \quad \quad \quad (۰۸ \ ۱۶) \\
 \underline{۱ \ ۱۰ \ ۰} \quad \quad ۰ \ ۹ \ ۶ \\
 \quad \underline{۹ \ ۶} \\
 ۱ \quad \quad ۳ \text{ باقیمانده} \\
 (۰۵)
 \end{array}$$

۱۵ را باید کاهش دهیم

$$\begin{array}{r}
 ۴۰. \sqrt{۶ \ ۸ \ ۳} = ۲ \ ۶ \text{ باقیمانده ای } ۲۵ \text{ است،} \\
 \quad \quad \quad (۲۴ \ ۳۶) \text{ یعنی بیش از دو برابر} \\
 \underline{۴ \ ۰۸ \ ۳} \quad \quad ۲ \ ۷ \ ۶ \text{ ۲۵ دارد. بنا بر این به جای آن } ۲۶ \\
 \quad \underline{۲ \ ۶} \text{ را می آزماییم} \\
 ۲ \quad \quad ۷ \text{ باقیمانده}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5. \sqrt{1288} = 35 \\
 \underline{100} \\
 28 \\
 \underline{25} \\
 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1288 \\
 1352 \\
 144
 \end{array}$$

باقیمانده ۱۴۴ است

$$\begin{array}{r}
 6. \sqrt{2569} = 50 \\
 \underline{25} \\
 69 \\
 \underline{50} \\
 19
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2569 \\
 2500 \\
 69
 \end{array}$$

باقیمانده ۸۰ است (۲۵)

$$\begin{array}{r}
 7. \sqrt{46500} = 215 \\
 \underline{400} \\
 65 \\
 \underline{45} \\
 20 \\
 \underline{15} \\
 5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 46500 \\
 44100 \\
 2400 \\
 1500 \\
 500
 \end{array}$$

وقتی ۵ را از ۵ تفریق می‌کنیم ۰ خط می‌خورد
 ۴ هم وقتی از ۶ در ستون دوم تفریق می‌شود خط می‌خورد.
 باقیمانده ۲۲۲۵ است

$$\begin{array}{r}
 8. \sqrt{103456} = 321 \\
 \underline{900} \\
 134 \\
 \underline{100} \\
 34 \\
 \underline{324} \\
 16
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 103456 \\
 90000 \\
 13456 \\
 32400 \\
 1656
 \end{array}$$

باقیمانده ۴۱۵ است

9. $\sqrt{3 \ 6 \ 2 \ 7 \ 2 \ 1} = \frac{6 \ 0 \ 3}{\cancel{3} \ \cancel{6} \ 0}$
 $\underline{3 \ 6 \ 0 \ 4 \ 1 \ 7 \ 2 \ 1}$
 $ \underline{6 \ 0 \ 9}$
 $0 \ 4 \ 1 \ 1 \ 1 \ 9 \text{ است}$ $0 \ 0 \ 9$ باقیمانده 1119 است

۱۰. $\sqrt{9 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 5}$ $=$ $\frac{9 \ 4 \ 8}{\hline}$

$\frac{8 \ 1 \ 2 \ 0 \ 3 \ 0 \ 4 \ 5}{\hline}$

$\frac{17 \ 0 \ 4}{\hline}$

باقیمانده ۱۳۴۱۵۰ است $\frac{7 \ 0 \ 4}{\hline}$

$\frac{1 \ 7 \ 0 \ 4}{\hline}$

عددهای هفت رقمی و هشت رقمی

از این عددها جوابهای چهار رقمی به دست می آید. در این موارد هم به شیوه‌ای مشابه آنچه برای جوابهای دو رقمی و سه رقمی داشتیم، عمل می‌کنیم. باید توجه کنید که این شیوه قطعی و بدون انعطاف نیست. البته نخستین بار هنگام عرضه این روش آن را به طور قطعی بیان می‌کنیم. پس از آشنا شدن با این روش، هر کسی می‌تواند بنا به سلیقه خود تغییراتی در آن بدهد. اغلب این تغییرات به صورت حذف بخشی از اعمال است — هر چه با این روش بیشتر آشنا شویم، مراحل بیشتری را می‌توانیم به طور ذهنی انجام دهیم و به این ترتیب از زحمت نوشتن آنها معاف شویم. به عنوان مثال:

۱. اولین رقم جواب، رقمی است که مجذور آن قدری کوچکتر از رقم اول یا دو رقم اول جواب است، چنانکه در مثالی داشتیم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{1 \ 0 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6} = 3 \\ \underline{9} \\ 1 \end{array}$$

صورت تغییر یافته: می‌توانیم رقم ۳ را بیابیم و ۹ را در ذهن تفریق کنیم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{1 \ 0 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6} = 3 \\ 1 \end{array}$$

۲. برای یافتن رقمهای دیگر جواب، از حاصل ضربهای متوالی استفاده کرده و عددهای دو رقمی را پیوند زده‌ایم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{1 \ 0 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6} = 3 \ 2 \\ 1 \qquad \qquad \qquad (12 \ 04) \end{array}$$

در مثالهایی که مطرح شد، معمولاً این عددهای دو رقمی را مثلاً به صورت ۱۲۰۴ نوشته و سپس آنها را پیوند زده‌ایم. عملاً هنگام کار لزومی ندارد آنها را بنویسیم. پس از قدری تمرین، می‌توانیم با نگاه کردن به ۳۲، به طور ذهنی به ۱۲۴ برسیم. اما دو برابر کردن حاصل ضرب متوالی یادتان نرود!

۳. پس از آنکه همه رقمهای جواب پیدا شد، به محاسبه باقیمانده عمل می‌پردازیم. در مثالهای بالا این کار با یک تفریق نشان داده می‌شد. در آنجا رقمهای موجود در ستونی از ارقام جدول طرف راست را با هم جمع می‌کردیم و پس از جمع کردن همه ستونها، مجموع را در یک مرحله از همه رقمهای به کار رفته عدد مفروض تفریق می‌کردیم:

$$\sqrt{1 \ 0 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6} = \frac{3 \ 2 \ 1}{\begin{array}{r} 14 \ 5 \ 6 \\ 10 \ 4 \ 1 \end{array}}$$

باقیمانده: $\begin{array}{r} 4 \ 1 \ 5 \\ 0 \ 4 \ 1 \\ 10 \ 4 \ 1 \end{array}$

صورت دیگر: می‌توانستیم تفریق را چند مرحله‌ای انجام دهیم و هر بار یک ستون را تفریق کنیم، اول ۱۰، بعداً ۴، سپس ۱:

$$\sqrt{1 \ 0 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6} = \frac{3 \ 2 \ 1}{\begin{array}{r} 14 \ 45 \ 416 \\ (-10) \downarrow (-4) \downarrow (-1) \\ 4 \ 41 \ 415 \end{array}}$$

$\begin{array}{r} 0 \ 4 \ 1 \\ 10 \ 4 \ 1 \end{array}$

اینکه پس از قدری آشنا شدن با روش بالا دیگر جدول کوچک زیر ۳۲۱ را نمی‌نویسیم، خود گامی به جلوست. این کار را می‌توانیم ذهنی انجام دهیم. در این صورت، جدول کوچک یکباره محاسبه نمی‌شود بلکه هر ستون آن را در یک مرحله محاسبه می‌کنیم. به محض محاسبه هر ستون، آن را با تفریق کردنش از عدد عمل، به کار می‌بریم به طوری که می‌توانیم آن ستون را بلافاصله فراموش کنیم. اما این رسیدن به وضع طبعاً به تمرین کافی بستگی دارد.

در مورد عددهای هفت رقمی و هشت رقمی، همه آنچه را که در عددهای کوتاهتر داشتیم به کار می‌بریم، و در پایان چیزی به آنها می‌افزایم. به عبارت دقیقتر:

۱. سه رقم اول از چهار رقم جواب را درست همان طور که جوابهای

سه رقمی را پیدا می کردیم، به دست می آوریم. مثلاً جذر ۱۰۳۲۳۳۶۹ چنانکه خواهیم دید ۳۲۱۳ در می آید. سه رقم اول جواب ۳۲۱ است، پس عمل دقیقاً مثل آنچه در مثال کوتاهتر قبلی داشتیم انجام می گیرد:

$$\begin{array}{r} \sqrt{1 \ 0 \ 3 \ 2 \ 3 \ 3 \ 6 \ 9} = \underline{\underline{3 \ 2 \ 1}} \\ 1 \ 0 \ 3 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{X} \ \cancel{X} \ 2 \\ \cancel{X} \ 6 \\ 0 \ 2 \ 1 \end{array}$$

اما اکنون به سراغ محاسبه باقیمانده نمی رویم. هنوز رقمی از جواب مانده که باید پیدا شود.

۲. رقم چهارم جواب را به این صورت پیدا می کنیم: ستون بعدی جدول (۵، ۶، ۷) را درست مثل همیشه برای یافتن رقمی از جواب به کار می بریم. یعنی، جمع کل ستون را پیدا می کنیم (۷ بعلاوه ۶ بعلاوه ۵ می شود ۱۸)، و رقم دهگان این مجموع را ضمن یک پیکان رو به بالا تفریق می کنیم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{1 \ 0 \ 3 \ 2 \ 3 \ 3 \ 6 \ 9} = \underline{\underline{3 \ 2 \ 1}} \\ 1 \ 0 \ 3 \ 0 \ 2 \\ \nearrow (-1) \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{X} \ \cancel{X} \ 2 \\ \cancel{X} \ 6 \\ 0 \ 2 \ 1 \end{array}$$

سپس رقم یکان مجموع را (که صفر است) ضمن یک پیکان رو به پایین تفریق می کنیم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{1 \ 0 \ 3 \ 2 \ 3 \ 3 \ 6 \ 9} = \underline{\underline{3 \ 2 \ 1}} \\ 1 \ 0 \ 3 \ 0 \ 2 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{X} \ \cancel{X} \ \cancel{X} \\ \cancel{X} \ \cancel{X} \\ \cancel{X} \ 2 \ 1 \end{array}$$

در اینجا ۴ و ۶ و صفر را خط زده ایم زیرا هم اکنون آنها را به کار بردیم و هر دو رقم ۱۵ را تفریق کردیم.

نصف این ۲ ی اخیر را می گیریم و صفری در آخرش می آوریم (نصف ۲ می شود ۱ که با صفر می شود ۱۵) و حاصل را بر اولین رقم جواب که ۳ است تقسیم می کنیم (۱۵ تقسیم بر ۳ می شود ۵). این رقم ۳ به دست آمده، آخرین رقم جواب است:

$$\begin{array}{r} \sqrt{1 \ 0 \ 3 \ 2 \ 3 \ 3 \ 6 \ 9} = 3 \ 2 \ 1 \ 3 \\ \underline{1 \ 0 \ 3 \ 0 \ 2} \\ 1 \ 2 \\ (10) \end{array}$$

۳. همه رقمهای به کار نرفته ۱۵۳۲۳۳۶۹ به باقیمانده منتقل می شوند. اکنون باید مطلبی به این روش اضافه شود. جدول کوچک زیر جواب، به ستونهای بیشتری نیاز دارد. اکنون موقتاً این موضوع را رها می کنیم و به مثال دیگری که همین مراحل در آن انجام شده، می نگریم. می خواهیم جذر چهار رقمی عدد ۴۰۵۹۴۲۲۴ را پیدا کنیم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{4 \ 0 \ 5 \ 9 \ 4 \ 2 \ 2 \ 4} = 6 \ 3 \ 3 \ 2 \\ \underline{4 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 9} \\ 4 \ 4 \ 3 \\ (20)(20)(15) \end{array}$$

سه رقم اول جواب درست همان طوری پیدا شد که جوابهای جذر سه رقمی محاسبه می شد. برای یافتن آخرین رقم، یعنی ۲، ستون (۱ و ۶ و ۹) را که مجموعش ۱۶ است، از ۱۹ تفریق می کنیم و «نصف» ۳ حاصل را اختیار می کنیم. با افزودن صفر، تفاضل را خرد می کنیم و به ۱۵ می رسیم. آن را بر رقم ۶ از ۶۳۳ تقسیم می کنیم، نتیجه ۲ می شود که

آخرین رقم جواب است.

باقیمانده و امتحان

۱. آخرین عدد عمل را بالا می آوریم و همه رقمهای به کار نرفته عدد مفروض را به دنبالش «وصل می کنیم».

مثال اول:

$$\begin{array}{r} \sqrt{1 \quad 0 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 6 \quad 9} = 3 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \\ \underline{9 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 2} \quad \nearrow 2 \quad 3 \quad 3 \quad 6 \quad 9 \\ 1 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

مثال دوم:

$$\begin{array}{r} \sqrt{4 \quad 0 \quad 0 \quad 9 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \quad 2} = 6 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \\ \underline{3 \quad 6 \quad 10 \quad 19} \quad \nearrow 3 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 2 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

از عددی که هم اکنون یافتیم، یعنی ۲۳۳۶۹، یا ۳۴۲۲۴ یا هر چند که باشد، عددی را که دربندهای بعدی پیدا می شود، تفریق می کنیم. حاصل کار، باقیمانده عمل است.

۲. برای پیدا کردن عددی که باید تفریق شود، جدول کوچک زیر جواب را گسترش می دهیم. قبلاً در مثال اول داشتیم:

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \\ \hline \cancel{3} \quad \cancel{2} \quad \cancel{1} \\ \quad \cancel{3} \quad \cancel{2} \\ \quad \quad \cancel{3} \quad \cancel{2} \quad 1 \end{array}$$

این جدول بدون استفاده از آخرین رقم جواب، که ۳ است، تشکیل شده بود. در آنچه اکنون اضافه می شود نقش آخرین رقم، مطرح می شود: حاصل ضرب متوالی این ۳ را با رقمهای دیگر جواب، به همه صورتهای ممکن تشکیل می دهیم، و این ۳ را مجذور می کنیم:



با انجام ضرب بترتیب از چپ به راست رقمهای ۹ و ۶ و ۳ و ۹ را خواهیم داشت. اما در جدول مربوط به روش جذرگیری، همه حاصل ضربهای متوالی باید دو برابر شوند، پس داریم:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 8 \\ 1 \quad 2 \\ 0 \quad 6 \\ 0 \quad 9 \end{array}$$

همچنانکه برای یافتن اعداد، رقمهای ۳۲۱۳ را یکی یکی از چپ به راست طی کردیم، این عددها هم هر یک نسبت به قبلی یک مرحله به سمت راست کشیده شده اند.

خوب، حالا چطور باید این عددهای جدید را در جدول کوچک عمل جذرگیری وارد کنیم؟ اولین رقم از این جدول چهار عددی، یعنی رقم ۱ از ۱۸ را در آخرین ستونی که خط خورده است، می نویسیم. اما فراموش نکنید که جلوی هر عدد یک رقمی باید صفری هم بگذاریم، مثل ۶ در جدول بالا که به صورت ۰۶ نوشته شد. اگر اولین عدد این جدول به

جای ۱۸، عدد ۸ بود آن را به صورت ۵۸ می نوشتیم. توجه به این نکته مهم است، زیرا از بروز اشتباه در تعیین ستونی که هر عدد باید در آن قرار گیرد، جلوگیری می کند. پس در مثال اول داریم:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 ۳ & ۲ & ۱ & ۳ \\
 \hline
 \cancel{۳} & \cancel{۲} & \cancel{۱} & \\
 & \cancel{۲} & \cancel{۱} & \\
 & & ۲ & ۱ \\
 & & ۱ & ۸ \\
 & & & ۱۲ \\
 & & & ۰۶ \\
 & & & ۰۹ \\
 \hline
 & & ۲ & ۳ & ۳ & ۶ & ۹
 \end{array} \\
 \text{جمع کل :}
 \end{array}$$

پس عملاً دستور کار چنین است: رقم دهگان ۱۸، یا هر عددی که در مثالهای دیگر باشد، وارد آخرین ستونی که خط خورده است می شود. طبقاً این کار همان طور که در مورد ۱۸ دیدیم به طور عادی صورت می گیرد زیرا معمولاً عددی دو رقمی داریم. اما گاه عددی یک رقمی، مثل ۶ داریم. در این موارد برای جلوگیری از اشتباه کافی است، ۶ را همیشه به صورت ۰۶ بنویسیم. گاهی هم ممکن است عددی سه رقمی داشته باشیم: ۹ ضرب در ۷ می شود ۶۳، دو برابرش ۱۲۶. در این موارد، باز هم رقم دهگان را در آخرین ستون خط خورده قرار می دهیم. با داشتن ۱۲۶، رقم ۲ را در این ستون می گذاریم.

در مثال دیگری که آورده شد، داریم:

$$\sqrt{9 \ 9 \ 8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4} = 3 \ 0$$

$$\begin{array}{r} 9 \ 09 \\ \hline \end{array}$$

$$0 \ 9$$

(۲۵)

رقم بعدی جواب چیست؟ این ۴۵ را بر رقم ۳ از جواب تقسیم می‌کنیم، حاصل ۱۵ می‌شود. اما رقم بعدی جواب نمی‌تواند ۱۵ باشد زیرا ۱۵ رقم نیست بلکه عددی دو رقمی است. پس معلوم می‌شود که صفر در نظر گرفته شده را باید افزایش دهیم، در نتیجه به ۳۱ می‌رسیم. به همین طریق، رقم ۵ در ۳۱۵ کوچکتر از مقدار مناسب بود، بنابراین آن را افزایش دادیم و به ۳۱۶ رسیدیم.

حالا جذر ۸۷۲۴۳۲۱ را پیدا می‌کنیم. با جدا کردن رقمها خواهیم داشت $8724321/43/72/8$ ، بنابراین جواب چهار رقمی است و کار با ۸ شروع می‌شود، نه با ۸۷:

$$\sqrt{8 \ 7 \ 2 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1} = \frac{2 \ 9}{2 \ 2 \ 1}$$

$$\begin{array}{r} 4 \ 07 \\ - \swarrow \downarrow \\ 2 \ 3 \end{array}$$

(۲۰) (۱۵)

با تقسیم ۲۰ بر ۲ رقم دوم جواب ۱۰ در می‌آید که پذیرفتنی نیست. بنابراین ۱۰ را به ۹ تقلیل می‌دهیم. وقتی با «خرد کردن تفاضل» به ۱۵ می‌رسیم، ۲۹ را به عنوان بخشی از جواب یافته‌ایم. به این نکته توجه کنید که به جای تقسیم کردن ۱۵ بر رقم ۲ از ۲۹، این ۱۵ را به ۳ تقسیم می‌کنیم. علت این کار را به اتکای برداشت حسی می‌توانیم درک کنیم. شر عددی که با ۲۹ آغاز شود تقریباً به بزرگی عددی است که با ۳۰ شروع می‌شود و با عددی که با ۲۰ شروع شود خیلی فاصله دارد. پس

برابر نمی شود.

برای جذر گرفتن از ۸۷۲۵۷۹۹۶۱ رقمهایش را به این صورت جدا می کنیم ۸/۷۲/۰۷/۹۹/۶۱، پس جواب پنج رقم خواهد داشت و کار با ۸ شروع می شود:

$$\begin{array}{r} \sqrt{1\ 7\ 2\ 0\ 7\ 9\ 9\ 6\ 1} = 2\ 9\ 5\ 3 \\ \underline{4}\ 0\ 7\ 12\ 10 \\ 4\ 3\ 2\ 1 \\ (05) \end{array}$$

(ضمن بالا رفتن تفريق می شود)

$$\begin{array}{r} 1\ 2 \\ \underline{} \\ 5\ 2 \\ 3\ 0 \\ 0\ 9 \end{array}$$

(ضمن پايين آمدن تفريق می شوند)

با «خُرد کردن تفاضل» در مورد ۱ به عنوان آخرین عدد عمل به ۵۵ می‌رسیم. آن را بر ۳، که از ۲۹ به آن رسیده‌ایم، تقسیم می‌کنیم و ۱ یا ۲ حاصل می‌شود که هنوز نمی‌دانیم کدام یک را باید اختیار کنیم. عملاً معلوم می‌شود که ۱ درست است پس برای جلوگیری از دوباره نوشتن، بکراست همان را به کار می‌بریم:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{18720719961} = 29531 \\
 \underline{20719961} \\
 179961 \\
 \underline{179961} \\
 2321
 \end{array}$$

باقیمانده نداریم

$$\begin{array}{r}
 29531 \\
 \times 29531 \\
 \hline
 179961
 \end{array}$$

طبق اصولی که ذکر شد، ردیف شیبدار عددهای جدید، یعنی ۵۴، ۱۸ و غیره از ضرب کردن آخرین رقم جواب در یکایک رقمهای جواب و دو برابر کردن حاصل، و سپس مجذور کردن خود آخرین رقم، به دست می آید. همچنین طبق اصولی که داشتیم، رقم دهگان اولین عدد از ردیف شیبدار جدید، یعنی رقم دهگان ۵۴، در آخرین ستون خط خورده، نوشته می شود.

در عمل به چنین جدول گسترده ای نیاز نداریم. در واقع هم می توانیم آن را مختصرتر کنیم اما بهترین کار آن است که هر کس به اقتضای سلیقه خود عمل کند. مثلاً در این مورد می توانیم چند تا از این عددهای دو رقمی را به یکدیگر پیوند بزنیم، که این در صورت نوشتن نتیجه ها مفید است، یا می توانیم بکلی از نوشتن عددهای دو رقمی چشم پوشیم و به جای این کار هر ستون را بنوبت تفریق کنیم.

امتحان عمل

در مجذور کردن اعداد و در جذر گرفتن می توانیم از روشهای امتحانی بسیار شبیه به آنچه در ضرب و تقسیم به کار می بردیم استفاده کنیم. در واقع، مجذور کردن نوع خاصی از ضرب است که در آن، عدد را در خودش ضرب می کنیم، بنابراین می توانیم امتحان عمل ضرب را عیناً به کار ببریم. برای این منظور، مجموع ارقام عددهایی را که در یکدیگر ضرب می شوند و مجموع ارقام حاصل عمل را پیدا می کنیم، تا ببینیم آیا با هم وفق می دهند یا نه. این شیوه مستقیماً در مجذور کردن اعداد قابل استفاده است. مثال $۱۰۲۴ = ۳۲^۲$ را در نظر بگیرید. قاعدتاً در چنین عمل آسانی نباید اشتباه کرده باشیم ولی فعلاً می خواهیم مثالی عرضه کنیم.

$$۳ + ۲ = ۵ \quad \text{مجموع ارقام } ۳۲$$

$$۱ + ۰ + ۲ + ۴ = ۷ \quad \text{مجموع ارقام } ۱۰۲۴$$

اگر مجذور ۳۲ عدد ۱۰۲۴ باشد، با مجذور کردن مجموع ارقام ۳۲ هم باید مجموع ارقام ۱۰۲۴ به دست آید. آیا این طور هست؟ مجموع ارقام ۳۲ می شود ۵. مجذور آن ۲۵ است که به ۷ تبدیل می شود. یادتان باشد که، همه مجموعهای ارقام باید به عددی یک رقمی تبدیل شوند. پس با مجذور کردن مجموع ارقام ۵ به ۷ می رسیم. آن را با مجموع ارقام ۱۰۲۴ که آن نیز ۷ است مقایسه می کنیم. با هم مطابقت دارند پس نتیجه امتحان عمل مثبت است و عمل درست انجام گرفته است.

امتحان جذر. در این مورد همان نوع کاری را می کنیم که برای امتحان تقسیم می کردیم. در اینجا عکس عمل را به کار می بریم که کاملاً با خود عمل هم ارز است. مثلاً یکی از جذرهایی که پیدا کردیم جذر ۲۵۷۹۳۶ بود. مقدار جذر را دقیقاً ۴۵۶ به دست آوردیم که باقیمانده ای نداشت. حالا آن را امتحان می کنیم:

$$\sqrt{۲۰۷۹۳۶} = ۴۵۶$$

: مجموعهای ارقام

۵

۶

رقم ۶ را مجذور می‌کنیم، حاصل ۳۶ می‌شود. اما ۳ بعلاوه ۶ می‌شود ۹، که در مجموع ارقام، معادل صفر است. پس دو نتیجه با هم وفق می‌دهند و امتحان درستی عمل را نشان می‌دهد.

منطق کار چنین است: گفتن اینکه جذر ۲۰۷۹۳۶ می‌شود ۴۵۶، مثل این است که بگوییم مجذور ۴۵۶ می‌شود ۲۰۷۹۳۶. اگر یکی درست باشد دیگری هم درست است. بنابراین به جای امتحان کردن عمل جذرگیری از عدد مفروض، عمل مجذور کردن ۴۵۶ را امتحان می‌کنیم. مجموع ارقامهایی چون صفر، یا ۱۸ یا ۲۷ یا ۳۶ تا آخره با یکدیگر هم‌ارزند و این وضع باعث چندگانگی در عددی که باید جذرش را بگیریم می‌شود. پس به روش فوق با مجذور کردن مجموع ارقام جذر، امتحان قابل اعتمادی خواهیم داشت.

وقتی عمل باقیمانده دارد چکار می‌کنیم؟ همان کاری که در تقسیم می‌کردیم. خود باقیمانده یا مجموع ارقام آن را تفریق می‌کنیم. مثلاً در مثالی که پیشتر حل کردیم:

$$\sqrt{465000} = 215$$

باقیمانده ۲۷۵

مجموع ارقام: ۶ ۸

باقیمانده ۵

: باقیمانده را تفریق می‌کنیم ۱

برای امتحان کردن عمل، ۸ را مجذور می‌کنیم که ۶۴ می‌شود و مجموع ارقامش ۱ است. پس عمل درست بوده است.

در محاسبه جذر امتحانهای فرعی هم در ضمن عمل داشتیم. اما این امتحان نهایی با کل جواب و باقیمانده همچنان اهمیت زیاد خود را داراست.

فصل هفتم

بیان جبری روش تراختبرگ

احتمالاً کمتر کسی را می‌توانیم بیابیم که زمانی با مسئله‌ای از نوع زیر کلنجار نرفته باشد:

یک بار نجاری متوجه شد تخته‌ای که در اختیار دارد بیش از حد دراز است. بنا بر این اره‌ای برداشت و آن را به سه قطعه برید. قطعه اول ۱ متر طول داشت. درازای قطعه دوم برابر بود با طول قطعه اول به اضافه یک سوم طول قطعه سوم. قطعه سوم هم به اندازه مجموع قطعه اول و دوم طول داشت. درازای تخته اولیه و هر یک از قطعات بریده شده چقدر بوده است؟

اگر اهل معماهای ریاضی بوده‌اید، حتماً با این نوع معما که به صورتی‌های مختلف بیان می‌شود آشنا هستید. پاسخ این معمای خاص چنانکه بعداً خواهیم دید، ۶ متر برای تخته اولیه و به ترتیب ۱، ۲ و ۳ متر برای قطعات بریده شده است.

از هر راهی که به جواب برسید زیاد مهم نیست و اگر هم اصلاً نتوانید جواب را پیدا کنید، زیاد مهم نیست. ما با خودِ معما کاری نداریم و تنها به این دلیل آن را بیان کردیم که مثال زیبایی برای یک دیدگاه نسبت به جبر است. این مسئله خاص و همه مسائل از این نوع را به کمک جبر می‌توانیم به بهترین وجه حل کنیم. خصوصیتی از جبر که در اینجا به

میان می آید این است که می گوئیم «مجهول را x می نامیم». در جستجوی عددی هستیم که تا مسئله حل نشود مقدارش معلوم نمی شود. پس فعلاً آن را با حرف x یا در صورت تمایل با حرفی دیگر نشان می دهیم.

البته کار جبر به همین جا پایان نمی گیرد. اولاً، در قلمرو ریاضیات محض، نظریه جبری بسیار گسترده و عمیقی وجود دارد که کارش حل این گونه مسئله ها نیست. ثانیاً کاربردهایی از جبر وجود دارد که دارای ارزش عملی بیشتری است و با آن نوعی از جبر که در حل معماها به کار می رود فرق دارد. در اینجا با یکی از این کاربردها سرو کار خواهیم داشت و در سراسر این فصل از آن بهره خواهیم جست.

گذشته از موضوع «مجهول را x نامیدن» در جبر با دیدگاه توصیف کلی هم رو به رو می شویم. بدین معنا که مجموعه ای از اعداد را یکجا به یک نام می خوانیم بی آنکه روی عدد خاصی انگشت بگذاریم.

به این مثال توجه کنید: گروهی از مردان عضو یک تیم پینگ پنگ هستند و همسرانشان هم عضو یک تیم پینگ پنگ زنان. آقای الف ۲۸ ساله و همسرش ۲۶ ساله است؛ آقای ب ۲۵ ساله و همسرش ۲۳ ساله است؛ آقای ج ۲۹ ساله و زنش ۲۷ ساله است؛ آقای د ۲۳ ساله و زنش ۲۱ ساله است؛ آقای ه ۲۴ ساله و زنش ۲۲ ساله است.

چگونه می توانیم این عددها را خلاصه کنیم؟ برای این کار توجه می کنیم که تیم پینگ پنگ زنان ۲ سال از تیم پینگ پنگ مردان جوانتر است. در واقع، هر شوهری دو سال از زنش بزرگتر است. اگر سن هر یک از شوهران را با حرف h و سن زن او را با حرف w نشان دهیم^۱ خواهیم داشت:

$$h = w + 2$$

۱. حرف اول دو واژه husband, wife که در انگلیسی بترتیب به معنای شوهر و زن است - م.

این درست معادل آن است که بگوییم هر یک از زنان دو سال از شوهرش کوچکتر است:

$$w = h - 2$$

همین مطلب را می‌توانیم با استفاده از اندیس بنویسیم. حرف a را به نشانه «سن»^۲ به کار می‌بریم و یک h یا w کوچک کمی پایین‌تر، جلوی می‌گذاریم که به معنی «شوهر» یا «زن» خواهد بود و رابطه به این صورت در می‌آید:

$$a_h = a_w + 2$$

برای آنکه کارایی این روش معلوم شود حرف s را به معنی «امتیاز»^۳ می‌گیریم، در نتیجه رابطه‌ای مثلاً به صورت زیر خواهیم داشت:

$$s_h = s_w + 25$$

این در صورتی است که هر شوهر ۲۵ امتیاز بیشتر از زنش کسب کرده باشد.

نکته اینجا است که هر کدام از این معادله‌ها بیانگر وضعی است که برای همه اعداد مجموعه، یا به عبارت دیگر برای همه اعضای تیم صادق است. وقتی می‌نویسیم $h = w + 2$ ، در یک معادله به این مطلب اشاره می‌کنیم که $26 + 2 = 28$ برای آقا و خانم الف؛ همچنین به این مطلب که $23 + 2 = 25$ برای آقا و خانم ب، تا آخر. این یک حکم کلی است که همه حالات خاص را شامل می‌شود.

در این مثال بسیار ساده می‌توانستیم به جای علامتهای جبری از کلمات استفاده کنیم. جمله «هر شوهر دو سال از زنش بزرگتر است»،

۲. حرف اول واژه age.

۳. حرف اول واژه score.

را راحت تر می توانیم بیان و درک کنیم. اما در حالت های پیچیده تر، رابطه های موجود را براحتی می توانیم در قالب علایم بنویسیم، در حالی که بیان آنها با کلمات بسیار طولانی و پیچیده می شود. در اینجا برای تشریح بخش های اساسی روش تراختنبرگ به زبان جبر، با همین نوع حالت پیچیده سرو کار داریم. در فصل حاضر به مطالب زیر می پردازیم:

(۱) ابتدا بخشی از فصل اول را از دیدگاه تازه بررسی می کنیم تا نشان دهیم چکار می خواهیم بکنیم.

(۲) سپس مرور کوتاهی خواهیم داشت بر روش های اساسی جبر که البته جزو روش تراختنبرگ نیست. این مرور به خاطر سهولت کار کسانی است که تمایل دارند آنچه را قبلاً فرا گرفته اند یادآوری کنند؛ دیگران می توانند از خیر آن بگذرند.

(۳) سرانجام مفاهیم اساسی جبر را در دستورالعمل هایی که قبلاً به عنوان روش تراختنبرگ عرضه شده به کار خواهیم بست.

نمایش اعداد به صورت کلی

در فصل های گذشته با اعداد سرو کار داشتیم و در انواع مختلف محاسبات آنها را با یکدیگر ترکیب کردیم. در هر مورد، با یک جفت عدد یا یک عدد خاص عمل می کردیم مثلاً ۸۷۷۶×۶۳ . در این موارد از حروف برای نشان دادن عددها استفاده نکردیم، چنانکه ۸۷۷۶ و ۶۳ می توانند نشانه سن شوهر و زن باشند.

حالا می خواهیم روش تراختنبرگ، یا دست کم مهمترین بخش های آن را از طریق به کارگیری حروف به نشانه اعداد بررسی کنیم. با این کار می توانیم درباره همه عددها یکجا صحبت کنیم و حکم هایی درباره این روش بیان کنیم که همیشه درست خواهند بود بی آنکه عدد خاصی

که دستورها را در موردش به کار می‌بریم اهمیتی داشته باشد.

مطالعه این مبحث اختیاری است. برای هیچ یک از کاربردهای عملی، خواندن این فصل ضروری نیست. از طرف دیگر این نوع بحث برای خیلی اشخاص جالب است و ما هم به خاطر آنها این فصل را در کتاب گنجاندیم. از اینها گذشته، این کار دو فایده ملموس نیز دارد:

۱. با فرمولهای جبری ثابت می‌شود که دستورهایی که به کار می‌برده‌ایم درست‌اند. شمار کسانی که اندیشه‌های تازه را به دینده تردید می‌نگرند کم نیست. حتی گاه این تردید بعد از حل چند مثال و به دست آوردن جواب درست از روش مورد نظر هم بکلی برطرف نمی‌شود. در روش کلی با استفاده از جبر ثابت می‌شود که این دستورها همیشه جواب درست را خواهند داد. به این ترتیب، شکی که ممکن است در ذهن کسی مانده باشد زدوده می‌شود و با این وسیله می‌توان هر شخص دیگری را هم در مورد درستی این روش متقاعد کرد.

۲. نوشتن فرمولهای جبری سبب می‌شود که در مورد اصول حاکم بر کار به سیرتی کسب کنیم. وقتی مثاله خاصی را حل می‌کنیم. مثل ۷۷۶ ضرب در ۶۳، توجه‌مان باید بر اعدادی که پیش رو داریم متمرکز شود. جزئیات محاسبه نمی‌گذارد ببینیم چگونه تکه‌های تصویر کنار هم قرار می‌گیرند تا نتیجه کلی حاصل شود. اما وقتی از روش جبری استفاده می‌کنیم و اعداد را به صورت حروف نشان می‌دهیم، اوضاع به قرار دیگری است. در اینجا هیچ محاسبه واقعی انجام نمی‌دهیم. نمی‌گوییم «۳ ضرب در ۶ می‌شود ۱۸» یا نظایر آن. در عوض ذهنمان می‌تواند آزادانه نحوه ترکیب اجزای مختلف اعداد برای دستیابی به جواب را ملاحظه کند. به این ترتیب موضوع بهتر فهمیده می‌شود و ژرفتر در ذهن جا می‌گیرد.

برای نشان دادن نحوه کارکرد روش تراختنبرگ، لازم خواهد بود اعداد را «بگسترانیم» به طوری که نقش هر یک از رقمهای عدد را بتوانیم ببینیم. مثلاً عدد ۳۵۷ را در نظر می‌گیریم. معنی آن سه تا صد، پانزده تا ده، پانزده هفت تا یک است.

$$۳۵۷ = ۳ \times ۱۰۰ + ۵ \times ۱۰ + ۷$$

به همین ترتیب، عدد ۷۵۴ را هم می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$۷۰۴ = ۷ \times ۱۰۰ + ۰ \times ۱۰ + ۴$$

معنی این مقدار در قالب پول، ۷ اسکناس صد تومانی، هیچ اسکناس ده تومانی، ۴ سکه یک تومانی است.

هر عددی از رده چند صد — از صد تا هزار — را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$a \times ۱۰۰ + b \times ۱۰ + c$$

هر یک از حروف a ، b و c نشانه یک رقم است. این یک رقم می‌تواند صفر، یا ۹، یا هر عدد صحیحی بین این دو باشد. پس حرف a نشانه رقمی از صفر تا ۹ است، و b و c هم نشانه رقمهایی از همین نوعند، که ضمناً می‌توانند یکسان یا متفاوت باشند:

$$a = ۷$$

$$b = ۷$$

$$c = ۷$$

به این ترتیب، عدد ۷۷۷ حاصل می‌شود:

$$۷۷۷ = (۷ \times ۱۰۰) + (۷ \times ۱۰) + ۷$$

عددهای طولانیتر، مثلاً عدد شش رقمی، را هم می‌توانیم به همین شیوه بنویسیم:

$$(a \times ۱۰۰۰۰۰) + (b \times ۱۰۰۰۰) + (c \times ۱۰۰۰) + (d \times ۱۰۰) + (e \times ۱۰) + f$$

در همهٔ این عبارتها علامت \times را به معنای ضرب به کار برده‌ایم. مثلاً " $a \times ۱۰۰$ " را « a ضرب در صد» می‌خوانیم. اما راحت‌تر آن است که \times را ننویسیم. روش رایج‌تر هم این است که به جای " $a \times ۱۰۰$ " بنویسیم " $۱۰۰a$ " و بخوانیم «صد a ». همین که ۱۰۰ و عدد a کنار هم نوشته شده‌اند بدان معناست که در یکدیگر ضرب می‌شوند. پس عدد شش رقمی را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$۱۰۰۰۰۰۰a + ۱۰۰۰۰۰b + ۱۰۰۰۰c + ۱۰۰۰d + ۱۰۰e + f$$

در شیوهٔ معمولی نوشتن، که به جای حروف، ارقام به کار می‌روند، این عدد به صورت $abc\ def$ خواهد بود. صورت گستردهٔ عددها را برای محاسبات بعدی لازم خواهیم داشت.

همچنین توجه کنید که در صورت تمایل می‌توانیم جلو عدد مورد نظر صفری بگذاریم، زیرا با این کار عدد تغییری نمی‌کند. ممکن است بخواهیم این کار را برای گذاشتن یک صفر اضافی جلو عدد انجام دهیم، همان طور که در فصل مربوط به ضرب، این کار را می‌کردیم. در این صورت، مثلاً عدد ۳۵۷ چنین خواهد شد:

$$۳\ ۵\ ۷ = (۰ \times ۱۰۰۰) + (۳ \times ۱۰۰) + (۵ \times ۱۰) + ۷$$

به یاد دارید که، حاصل ضرب هر عددی در صفر، همان صفر است. پس در معادلهٔ بالا، (۰×۱۰۰۰) برابر با صفر است و بسته به میل خود می‌توانیم آن را بنویسیم یا ننویسیم. اینجا آن را می‌نویسیم زیرا می‌خواهیم عمل ضرب را شرح دهیم و در این روش یک صفر اضافی جلو عدد مفروض گذاشته می‌شود. اعداد سه رقمی، هر چه باشند، به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$(۰ \times ۱۰۰۰) + (a \times ۱۰۰) + (b \times ۱۰) + c$$

یا اگر ترجیح بدهیم، به صورت زیر:

$$(۱۰۰۰ \times ۰) + ۱۰۰a + ۱۰b + c$$

دستور ضرب اعداد در یازده

اکنون بد نیست آنچه را گفتیم برای آزمایش «دستور ضرب اعداد در یازده» به کار ببریم. لابد به یاد دارید که این دستور ساده چنین است «با همسایه جمع کنید» و منظور از همسایه در هر مرحله رقمی است که بلافاصله در سمت راست رقمی که به آن رسیده ایم قرار دارد. ضمناً این را هم می دانیم که باید صفری جلو عدد مفروض بگذاریم و دستور بالا را در مورد این صفر هم اجرا کنیم. آخرین رقم عدد مفروض، که در منتهی الیه سمت راست واقع است، طبعاً هیچ همسایه ای ندارد، بنابراین چیزی با این رقم جمع نمی شود. برای مشاهده کارکرد این دستور، عددی چهار رقمی اختیار می کنیم،

$$N = (0 \times 10000) + (a \times 1000) + (b \times 100) + (c \times 10) + d \\ = (10000 \times 0) + 1000a + 100b + 10c + d$$

عبارت بالا نشان دهنده همه عددهای چهار رقمی ممکن است، و انتخاب یک عدد چهار رقمی خاص، به معنای اختیار کردن چهار مقدار خاص برای a, b, c, d است. ما به این حروف مقدار خاصی نسبت نمی دهیم زیرا فعلاً می خواهیم راجع به همه عددهای چهار رقمی یکجا صحبت کنیم. کاری که می خواهیم انجام دهیم ضرب کردن این عدد کلی در ۱۱ است (۱۱ برابر است با ۱۰ بعلاوه ۱):

$$11 = 10 + 1$$

پس هر وقت عددی را در ۱۱ ضرب می کنیم، عملاً آن را در ۱۰ و سپس در ۱ ضرب و دو نتیجه را با هم جمع می کنیم:

$$35 \times 11 = 35 \times (10 + 1) \\ = (35 \times 10) + (35 \times 1)$$

اما با ضرب کردن هر عدد در ۱۰، فقط صفری در طرف راست آن اضافه می‌شود (۱۰ × ۳۵ می‌شود ۳۵۰). پس:

$$۳۵ \times ۱۱ = ۳۵۰ + ۳۵ = ۳۸۵$$

درستی این دستور که «برای ضرب کردن در ۱۰، صفری در طرف راست اضافه شود» با توجه به صورت گسترده اعداد و افزودن یک صفر (که مقدارش را تغییر نمی‌دهد!) معلوم می‌شود:

$$۳۵ = (۳ \times ۱۰) + (۵ \times ۱) + ۰$$

در ۱۰ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} ۳۵ \times ۱۰ &= (۳ \times ۱۰) \times ۱۰ + (۵ \times ۱) \times ۱۰ + ۰ \times ۱۰ \\ &= (۳ \times ۱۰۰) + (۵ \times ۱۰) + ۰ \\ &= ۳۵۰ \end{aligned}$$

اکنون همین کار را در مورد عدد چهار رقمی کلی — نه یک عدد خاص، بلکه هر عددی باشد — انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} ۱۰ \times N &= ۱۰ \times (۱۰۰۰۰ \times ۰ + ۱۰۰۰a + ۱۰۰b + ۱۰c + d) \\ &= ۱۰۰۰۰۰ \times ۰ + ۱۰۰۰۰a + ۱۰۰۰b + ۱۰۰c + ۱۰d + ۰ \end{aligned}$$

ضرب کردن در ۱۰ صفری به هر یک از مضروبهای ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و غیره اضافه می‌کند که همه رقمها را یک خانه به سمت چپ انتقال می‌دهد و صفری در منتهی‌الیه سمت راست باقی می‌گذارد.

حالا عدد کلی را در ۱ ضرب می‌کنیم. ضرب کردن هر عدد در یک، تغییری در آن نمی‌دهد. پس داریم:

$$۱ \times N = ۱۰۰۰۰ \times ۰ + ۱۰۰۰a + ۱۰۰b + ۱۰c + d$$

سرانجام، این عبارت مربوط به $1 \times N$ را به عبارت قبلی مربوط به $10 \times N$ می‌افزاییم تا $11 \times N$ به دست آید:

$$11 \times N = 100000 \times 0 + 10000a + 1000b + 100c + 10d + 0 + 10000 \times 0 + 1000a + 100b + 10c + d$$

این اعداد را دو تا دو تا جمع می‌کنیم، به این صورت که به هر جمله، جمله‌ای را که زیرش قرار گرفته می‌افزاییم:

$$11 \times N = 0 \times 100000 + (a+0) \times 10000 + (b+a) \times 1000 + (c+b) \times 100 + (d+c) \times 10 + d + 0$$

از طرف دیگر در حساب معمولی همیشه این خاصیت برقرار است که $a+b=b+a$ بدون توجه به اینکه a و b چه اعدادی باشند. مثلاً $3+5=5+3$. حاصل هر دوی این جفتها ۸ است. پس می‌توانیم ترتیب جفت‌های حروفی را که با هم جمع می‌شوند برعکس کنیم. معادلهٔ مربوط به $11 \times N$ با این کار به صورت زیر در می‌آید:

$$11 \times N = 0 \times 100000 + (0+a) \times 10000 + (a+b) \times 1000 + (b+c) \times 100 + (c+d) \times 10 + d + 0$$

این همان «دستور ضرب اعداد در یازده» است. برای ضرب کردن اعداد در ۱۱، به یکایک ارقام عدد مفروض «همسایه» اش را می‌افزاییم. همسایهٔ a رقم b است، زیرا عدد مفروض در شیوهٔ معمولی نوشتن، به صورت $abcd$ است. همسایهٔ b رقم c است. در اینجا هم، هر رقم را با همسایهٔ اش جمع کرده‌ایم و معادلهٔ مربوط به $11 \times N$ همان دستور ضرب اعداد در یازده است که قبلاً به کار می‌بردیم. به این ترتیب درستی این دستور ثابت می‌شود.

چرا صفری جلوی عدد مفروض گذاشتیم؟ برای به حساب آوردن «ده بر یک» که ممکن است در محاسبه داشته باشیم. توجه کنید که در

مورد ده بر یک باید به روش معمولی عمل کنیم. فرض کنید b برابر با ۷ و c برابر با ۸ باشد. در این صورت بخشی از جواب، جمله $(b + c) \times ۱۰۰$ خواهد بود که می شود $(۷ + ۸) \times ۱۰۰$ و حاصل آن ۱۵۰۰ بعلاوه ۵۰۰ (یا ۱۵۰۰) است. پس این جمله علاوه بر مرتبه «صدگان» جواب در مرتبه «هزارگان» هم به اندازه عدد ۱، اثر می گذارد. این ۱ را در گفتگوی عادی «ده بر یک» می نامیم. جمله هزارگان جواب در معادله بالا $(a + b) \times ۱۰۰۰$ است. اما رقم ۱ را از جمله صدگان به اینجا نقل کرده ایم، پس به ازای $b = ۷$ و $c = ۸$ ، خواهیم داشت $(a + b + ۱) \times ۱۰۰۰$. معلوم می شود که رقم ۱ از عدد ۱۵ یا هر عدد دیگری که داریم، باید به مرتبه بالاتر منتقل شود.

هنگامی که عدد مفروض در محدوده ۹۰۰۰ باشد، انتظار می رود که در آخرین مرحله ده بر یکی داشته باشیم. به همین علت است که باید صفری جلوی آن بگذاریم. فرض کنید $a = ۹$ و $b = ۸$ به طوری که عدد مفروض در محدوده ۹۸۰۰ قرار گیرد. آن را در ۱۱ ضرب می کنیم. در مرتبه هزارگان چه خواهیم داشت؟ می نویسم $a + b = ۹ + ۸ = ۱۷$ که اگر c رقم بزرگی باشد، احتمالاً ده بر یکی هم به این مجموع باید افزود. در هر صورت، مجموع دست کم ۱۷ است. اینجا باید ده بر یک را به مرتبه بالاتر منتقل کنیم. پس در مرتبه ده هزارگان چه خواهیم داشت؟ داریم $۱ + a + ۰$ و چون در این مثال $a = ۹$ است، حاصل ۱۰ خواهد بود. بدین ترتیب یک رقم ۱ به مرتبه صد هزارگان منتقل می شود. این مرتبه به صورت $۱۰۰۰۰ \times (۰+۱)$ در می آید. می بینیم که با گذاشتن صفری جلوی عدد مفروض جایی برای منتقل کردن این وجود خواهد داشت. این کل کاری است که صفر جلو عدد انجام می دهد و کم کاری هم نیست. اگر رقم منتقل شده را فراموش کنیم جواب پاک غلط در می آید.

آنچه گفته شد در مورد همه عددهای چهار رقمی صادق است. در

مورد عددهای پنج رقمی و سایر اعداد اوضاع از چه قرار است؟ برای پاسخگویی به سؤال دو راه وجود دارد که هر دو نتیجه بخش هستند:

۱. با توجه به اینکه از موضوع چهار رقمی بودن عدد مفروض استفاده‌ای نکردیم، براحتی می‌توانیم بگوییم که «همین استدلال مسلماً برای اعدادی با هر طول صادق است». مثلاً عدد پنج رقمی، یک حرف بیشتر خواهد داشت و به صورت $abcde$ خواهد بود. اما نحوه ضرب کردن عدد در ۱۰، افزودن خود عدد، و دسته‌بندی حروف به صورت جفت‌هایی چون $(a + b)$ و غیره عیناً به همان صورت است. پس همان استدلال بخوبی صادق خواهد بود.

۲. روش شسته رفته‌ای برای نوشتن اعداد با هر طول وجود دارد و با استفاده از آن همه جنبه‌ها در نظر گرفته می‌شود. کمی بعد به این موضوع خواهیم پرداخت. فعلاً نیاز واقعی به آن نداریم و بهتر است آن را قدری به تعویق بیندازیم.

اعمال جبری

وقتی عبارتی جبری به صورت $d + 100c + 1000b + 10000a$ نوشتیم، با آن چکار می‌خواهیم بکنیم؟ نوشتن به این صورت، هیچ اطلاع تازه‌ای به ما نمی‌دهد. همیشه باید کاری روی این عبارت انجام شود: یا باید آن را با عبارتهای دیگر ترکیب کنیم، همان طور که چند بند بالاتر عددی را به منظور ضرب کردن با ۱۱ ترکیب کردیم، یا در غیر این صورت باید آن را به طریق دیگری تغییر دهیم. در هر حال، این کار زیر عنوان رسمی و نسبتاً برجسته «اعمال جبری» خوانده می‌شود.

بی شک در مدرسه با این مطلب در جبر یا در حساب برخورد کرده‌اید. شاید بخشی از آن تنها در مثالها آمده و هیچ گاه بروشنی بیان نشده بود ولی در هر صورت حتماً به نحوی مطرح شده بود. اما شاید

برخی انواع عملهای ممکن برایتان تازگی نداشته باشد و همچنین ممکن است وسوسه شوید که بعضی از انواع نادرست عملها را به کار ببندید. بعضی از دیگر گونیها در آرایش ظاهری اعداد و حروف بخردانه به نظر می رسد ولی عملاً منجر به جواب غلط می شود. پس برای یادآوری آن مطالب بد نیست فهرستی از راههای مجاز تغییر دادن عبارتهای جبری را ذکر کنیم:

دسته بندی به صورت پرانتز یا گروه

این کار را اندکی پیشتر، در «دستور ضرب اعداد در یازده» انجام دادیم. آنجا عبارت $1000 \times (a+b)$ و عبارتهای نظیر آن داشتیم. حالتی را در نظر می گیریم که در آن a مساوی با ۲ و b مساوی با ۳ باشد؛ در این صورت $a+b$ برابر با ۵ است. در این حالت $1000 \times (a+b)$ برابر با ۵۰۰۰ است. این روال طبیعی، ساده کار است.

با وجود این، باید قدری مراقب بود. در عبارتهای پیچیده خطر اشتباه کردن وجود دارد مگر آنکه دستورهای خاصی را به یاد داشته باشیم یا مبانی موضوع را خوب بدانیم.

در استفاده از پرانتز یا گروه در واقع تنها یک نکته اساسی وجود دارد. در برخورد با پرانتز یا گروه باید آنچه را درون آنهاست یک عدد بینگاریم. علامتهای به کار رفته هم به طور طبیعی همین مفهوم را القا می کنند. فرض کنید به عنوان مثال $2 \times (5+1)$ را داشته باشیم. می خواهیم $5+1$ را به عنوان یک مفهوم منفرد در نظر بگیریم، بنابراین، آن را داخل پرانتز می گذاریم. سپس به جای $(5+1)$ عدد منفرد نظیرش را که ۶ است می نویسیم و داریم:

$$2 \times (5+1) = 2 \times 6 \\ = 12$$

اکنون فرض کنید داخل پرانتز تفریقی داشته باشیم، مثل

(۵-۱)×۲. همان اصل را به کار می‌بندیم و داریم

$$2 \times (5 - 1) = 2 \times 4 \\ = 8$$

واژه «پرانتز» را برای علامت کمانی شکل و واژه «کروشه» را برای علامت گوشه‌دار به کار می‌بریم. خیلی وقتها درون کروشه پرانتز داریم، مثل این حالت:

$$2 \times [(5 + 1) - (3 - 2)]$$

در این مورد چه باید بکنیم؟ اصل بر این است که آنچه را یکجا دسته‌بندی شده، به عنوان یک عدد تصور کنیم. در نتیجه باید کار را از درونی‌ترین دسته‌بندی آغاز کرد. یعنی فوراً نمی‌توانیم با $[(5 + 1) - (3 - 2)]$ کاری بکنیم، زیرا ابتدا نمی‌دانیم که مقدار عددهای داخل کروشه چقدر است. باید از جایی شروع کنیم که نتیجه‌اش بلافاصله معلوم است. این جا $5 + 1$ است که به جایش ۶ می‌گذاریم. به همین ترتیب می‌دانیم که $3 - 2$ می‌شود ۱. پس می‌توانیم با اطمینان بنویسیم

$$2 \times [(5 + 1) - (3 - 2)] = 2 \times [6 - 1]$$

پس کار تقریباً تمام شده زیرا $6 - 1$ برابر است با ۵ و بنابراین

$$2 \times [(5 + 1) - (3 - 2)] = 2 \times [6 - 1] \\ = 2 \times 5 \\ = 10$$

از اینجا به این دستور می‌رسیم که: از درونی‌ترین دسته‌ها آغاز کنید به سمت بیرون بیاید.

وقتی به جای اعداد از حروف استفاده می‌کنیم وضع قدری فرق دارد، زیرا معلوم است که با محاسبه واقعی نمی‌توانیم از دست پرانتزها بگریزیم. مثلاً $1000 \times (a + b)$ را نمی‌توانیم با انجام عمل جمع واقعی ساده کنیم،

زیرا نمی‌خواهیم هیچ مقادیر خاصی برای a و b در نظر بگیریم. در این مورد، احتمالاً باید عبارت را به همین صورت نگاه داریم. با این حال خیلی وقتها راحت‌تر آن است که با شیوه دیگری از دست پرانتزها خلاص شویم. این شیوه، «حذف پرانتزها» نام دارد و در مثال بالا چنین خواهد بود

$$2 \times (5 + 1) = 2 \times 5 + 2 \times 1$$

که پرانتزها را حذف کرده‌ایم و برای جبران این حذف هر آنچه را درون پرانتز بوده در ۲ ضرب کرده‌ایم. توجه کنید که با این کار به نتیجه درست هم می‌رسیم:

$$\begin{aligned} 2 \times (5 + 1) &= 2 \times 5 + 2 \times 1 \\ &= 10 + 2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

نتیجه ۱۲ همان چیزی است که قبلاً هم از ضرب ۲ در ۶ به دست آوردیم.

در کار با حروف، وضعی به شکل زیر خواهیم داشت:

$$a(x + y + z) = ax + ay + az$$

اینجا همه چیز را در عدد a ضرب کرده‌ایم. در طرف چپ علامت تساوی حاصل ضرب مجموع $z + y + z$ در a را داریم. در طرف راست، حاصل ضرب جداگانه هر یک از این سه حرف در a وجود دارد. اگر $a = 3$ و $x = 5$ ، $y = 2$ ، و $z = 4$ باشد (این اعداد را بدون دلیل خاصی، صرفاً به عنوان مثال اختیار کرده‌ایم)، خواهیم داشت:

$$3(5 + 2 + 4) = 3 \times 5 + 3 \times 2 + 3 \times 4$$

$$\begin{aligned} ۳ \times ۱۱ &= ۱۵ + ۶ + ۱۲ && \text{که می شود} \\ ۳۳ &= ۳۳ && \text{یا} \end{aligned}$$

پس اینجا روش ضرب کردن در یکایک جمله ها، نتیجه درست داده، همان طور که همیشه باید بدهد.

وقتی فقط عمل جمع داریم، کافی است پرانتزها را برداریم

$$\begin{aligned} ۲ + (۵ + ۱) &= ۲ + ۵ + ۱ \\ ۲ + ۶ &= ۷ + ۱ && \text{که می شود} \\ &= ۸ && \text{یا} \end{aligned}$$

وجود علامت منها درون پرانتز مشکلی ایجاد نمی کند. باز هم کافی است فقط پرانتزها را حذف کنیم:

$$\begin{aligned} ۲ + (۵ - ۱) &= ۲ + ۲ \\ ۲ + ۲ &= ۴ \end{aligned}$$

اما وجود علامت منها بیرون از پرانتز، جلوی کل پرانتز، به معنای آن است که باید همه آنچه را درون پرانتز است به منزله یک عدد منفرد، تفریق کنیم ولی این کار قدری درد سر دارد. وقتی پرانتزها را بر می داریم، باید همه علامتهای داخل پرانتز را بر عکس کنیم. همه علامتهای مثبت به منفی و همه منفی ها به مثبت تبدیل می شوند. مثل آنچه در زیر می بینید:

$$۸ - (۵ - ۱ + ۳ - ۲) = ۸ - ۵ + ۱ - ۳ + ۲$$

در سمت چپ دو علامت منفی داریم، ۱- و ۲-، و یک علامت مثبت، ۳+. عدد ۵ هم دارای علامت مثبت محسوب می شود. هر گاه جلوی عددی علامتی گذاشته نشود، نه مثبت و نه منفی، در این صورت علامت آن مثبت دانسته می شود.

توجه کنید که علت درست بودن این کار آن است که در طرف چپ معادله:

$$۸ - (۵ - ۱ + ۳ - ۲) \text{ می شود } ۸ - (۴ + ۱) = ۸ - ۵ = ۳$$

و در طرف راست:

$$۸ - ۵ + ۱ - ۳ + ۲ \text{ می شود } ۳ + ۱ - ۳ + ۲ = ۳$$

طرف چپ معادله با ۳ برابر است، طرف راست هم مساوی با ۳، پس معادله درست است.

مشابه این موضوع برای حروف به صورت زیر خواهد بود:

$$a - (m - n + s - t) = a - m + n - s + t$$

توجه کنید که در صورت تمایل می توانیم خلاف این کار را انجام دهیم. به جای حذف پرانتزها می توانیم در جایی که پرانتزی وجود ندارد پرانتز بگذاریم و گاه این کار مفید واقع می شود. اینکه پرانتزی حذف شود یا پرانتز تازه ای گذاشته شود، به وضع خاص مورد نظر بستگی دارد. می دانیم که:

$$۲(a + b + c) = ۲a + ۲b + ۲c$$

دو عبارتی که یکی در طرف چپ و دیگری در طرف راست علامت تساوی واقعند. با یکدیگر برابرند و می توانیم در هر مسئله یا محاسبه ای یکی از آنها را به جای دیگری بگذاریم. پس اگر ضمن حل مسئله ای متوجه شویم که عبارت $۲a + ۲b + ۲c$ داریم، در صورت تمایل حق داریم به جای آن $۲(a + b + c)$ بگذاریم. این کار «بیرون کشیدن ۲» یا «فاکتور گرفتن از ۲» است و خیلی وقتها چنین کاری مفید واقع می شود.

خیلی وقتها دو عبارت داخل پرانتز در کنار یکدیگر داریم، به این

صورت:

$$(a + d) + (c - d) : \text{جمع}$$

$$(a + b) - (c - d) : \text{یا تفریق}$$

$$(a + b)(c - d) : \text{یا ضرب}$$

ردیف آخر در واقع همان $(a+b) \times (c-d)$ است که معمولاً هنگام کار با حروف به جای اعداد، علامت ضرب را حذف می کنند. در همه این موارد دو کار باید انجام گیرد:

۱. حذف یکی از دو جفت پرانتز — به طور اختیاری — بدون تغییر دادن جفت دیگر، یعنی تنها یکی از پرانتزها را حذف می کنیم؛ سپس
۲. جفت دیگر پرانتزها.

مثلاً، در یک جمع ساده خواهیم داشت:

جمع :

$$(a + b) + (c - d) = a + b + (c - d) \quad \text{هنوز } (c-d) \text{ را یک کمیت}$$

$$= a + b + c - d \quad \text{به شمار می آوریم!}$$

تفریق :

$$(a + b) - (c - d) = a + b - (c - d)$$

$$= a + b - c + d \quad \text{علامت } d \text{ عوض می شود}$$

ضرب :

$$(a + b) \times (c - d) = (a + b)(c - d)$$

$$= a(c - d) + b(c - d) \quad \text{هنوز } (c-d) \text{ را یک عدد}$$

$$= ac - ad + bc - bd \quad \text{به شمار می آوریم}$$

معادله‌ها

برای عمل کردن روی معادله‌ها، از یک اصل اساسی در اوضاع مختلف استفاده می‌کنیم. ماهیت اصل مزبور این است: عبارتی که در طرف چپ علامت تساوی نوشته شده نشان دهنده یک کمیت است، و آنچه در طرف راست نوشته شده، صورت دیگری برای نمایش همان است. مثلاً:

$$a + 2b - 1 = 15$$

یعنی اینکه $a + 2b - 1$ صورت دیگری برای نوشتن کمیت ۱۵ است. هر کاری که با $a + 2b - 1$ بکنیم، مثلاً دو برابر کردن یا افزودن ۱ به آن، باید روی ۱۵ در طرف دیگر علامت تساوی هم انجام شود تا رابطه تساوی برقرار بماند:

$$a + 2b - 1 = 15$$

$$2(a + 2b - 1) = 30 \quad \text{دو برابر}$$

$$a + 2b - 1 + 1 = 16 \quad \text{بعلاوه ۱}$$

$$(a + 2b - 1)(a + 2b + 1) = 15 \times 15 \quad \text{به توان دو}$$

خلاصه کنیم: هر کاری که در طرف چپ معادله‌ای می‌کنیم باید در طرف راست آن هم انجام شود. اما همیشه به یاد داشته باشید که همه آنچه در طرف چپ علامت تساوی قرار گرفته باید یک کمیت منفرد به حساب آید و در مورد عبارت طرف راست هم همین طور. یعنی باید طوری در مورد آن عمل کرد که گویی داخل پرانتز قرار گرفته است، چنانکه واقعاً هم در بالا برای دو برابر کردن و به توان دو رساندن معادله، پرانتزها را گذاشتیم.

با استفاده از آنچه در بخشهای قبل گفته شد کارهای دیگری هم می‌توانیم بکنیم، مثلاً:

$$2a + 4b - 2 = 30 : \text{ دو برابر کردن معادله}$$

$$a + 2b = 16 : \text{ «جمع کردن» معادله با «۱»}$$

$$(a + 2b - 1)^2 = 225 : \text{ مجذور کردن معادله}$$

عبارت موجود در معادله آخر، که در آن یک عدد ۲ قدری بالاتر از ردیف نوشته شده، چیزی است که قبلاً در فصل مربوط به جذر و مجذور به آن برخورد کرده ایم. این ۲ ی کوچک «به توان دو» خوانده می شود و وقتی کنار عبارتی قرار می گیرد به معنای آن است که این عبارت در خودش ضرب می شود. عبارت 7^2 یعنی ۴۹، زیرا باید ۷ را در خودش ضرب کنیم. چون ۲ تا ۷ در یکدیگر ضرب می شود، این عدد ۲ را می نویسیم.

این اصل اساسی که هر کاری با یک طرف معادله کردیم باید با طرف دیگرش هم بکنیم، بسته به کاری که می کنیم، شکل های گوناگونی به خود می گیرد. بخصوص دو شکل خاص هست که زیاد به کار می رود: ۱. افزودن عدد یکسانی به دو طرف معادله. این کار شامل تفریق عدد یکسانی از هر دو طرف نیز می شود، زیرا تفریق کردن معادل است با افزودن عددی منفی. مثلاً:

$$x - 1 = 5$$

هر دو طرف را با ۱ جمع می کنیم، و داریم

$$x - 1 + 1 = 5 + 1$$

$$x = 6$$

یعنی

اغلب از این کار به عنوان «بردن عددی به طرف دیگر» یاد می شود. عملاً هم در اینجا عدد ۱ از عبارت $x - 1$ را به طرف راست می بریم و آن را به ۵ می افزاییم. در طرف چپ منهای ۱ داشتیم، که در طرف راست تبدیل به بعلاوه ۱ شد. همیشه همین طور است. این را می توانیم یک دستور کلی بدانیم و واقعاً هم چنین دستوری داریم که:

هنگام انتقال به طرف دیگر، علامت تغییر می کند.

همین قدر که متوجه می شویم در مثال ما چگونه $1 - x$ تبدیل به $1 + x$ شده که با $5 + x$ برابر است، به این دستور تسلط یافته ایم، بی آنکه بخواهیم آن را از بر کنیم. آنچه اینجا اتفاق افتاد این بود که در طرف چپ چیزی را افزودیم که برای از بین بردن منهای 1 لازم بود — عدد 1 را اضافه کردیم — و به این ترتیب منهای 1 را در طرف چپ حذف کردیم. برای آنکه تساوی برقرار بماند باید 1 را به طرف راست هم اضافه کنیم، که افزودیم. در هر معادله، هر یک از جمله ها را می توانیم به همین طریق به طرف دیگر معادله منتقل کنیم.

۲. ضرب یا تقسیم کردن دو طرف معادله به طرز یکسان. مثلاً

$$3 + 4 = 7$$

$$\text{ضرب در } 5: \quad 5(3 + 4) = 35$$

$$\text{که می شود:} \quad 5 \times 7 = 35$$

$$\text{یا:} \quad 15 + 20 = 35$$

در جبر وقتی هم که به جای اعداد، حروف را به کار می بریم، همین شیوه دنبال می شود، مانند مثال زیر:

$$x^2 + x + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\text{ضرب در } 4: \quad 4\left(x^2 + x + \frac{3}{4}\right) = 4 \times \frac{7}{4} = 7$$

$$4x^2 + 4x + 3 = 7$$

با این کار منخرجها حذف می شوند و معادله ساده تر می شود. معادله جدید، هم ارز همان معادله کسردار است ولی اعمال بعدی روی آن راحت تر انجام می شود.

مثال ۱: در آغاز این فصل معمایی مطرح کردیم. اکنون بد نیست با استفاده از جبر آن را مستقیماً حل کنیم.
در این معما سه عدد داشتیم — طول سه تخته، که به صورت عدد بیان می شود — و این اعداد طبق صورت معما دارای خواص زیرند:

۱. می دانیم که اولین عدد ۱ است.
۲. دومی برابر است با اولی بعلاوه یک سوم سومی، و
۳. سومی برابر است با مجموع دوتای اول.

نخستین عدد از این اعداد را x ، دومی را y و سومی را z می نامیم.
سه حکمی را که در بالا بیان شد می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} (۱) \quad x &= ۱ \\ (۲) \quad y &= x + \frac{1}{3}z \\ (۳) \quad z &= x + y \end{aligned}$$

برای راحت شدن از دست x ، در دو معادله دیگر هر جا x داریم معادله (۱)، $x=۱$ را به کار می بریم:

$$\begin{aligned} (۲) \quad y &= ۱ + \frac{1}{3}z \\ (۳) \quad z &= ۱ + y \end{aligned}$$

با رسیدن به این صورت جدید (۲) می توانیم y را از (۳) حذف کنیم. در (۳) به جای y معادلش را می گذاریم:

$$\begin{aligned} (۳) \quad z &= ۱ + (۱ + \frac{1}{3}z) \\ &= ۲ + \frac{1}{3}z \end{aligned}$$

این معادله شامل کسر است و کار کردن با کسر به راحتی کار کردن با اعداد صحیح نیست، پس کسرها را از بین می بریم. با ضرب کردن در

۳، داریم:

$$۳z = ۳ \times ۲ + ۳ \times \frac{1}{۳} z$$

$$۳z = ۶ + z$$

از هر دو طرف z را تفریق می‌کنیم (یا z را به طرف دیگر می‌بریم):

$$۳z - z = ۶ + z - z$$

$$۲z = ۶$$

هر دو طرف را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، و بخشی از جواب به دست می‌آید:

$$z = ۳$$

حالا y چقدر است؟ آن را با استفاده از معادله (۳) می‌توانیم پیدا کنیم:

$$z = ۱ + y$$

$$۳ = ۱ + y \quad \text{: که می‌شود}$$

از هر دو طرف ۱ را تفریق می‌کنیم:

$$۲ = y$$

$$y = ۲ \quad \text{: یعنی}$$

مقدار x چقدر است؟ می‌دانیم که x برابر با ۱ است، زیرا در مسئله خاص مقدارش داده شده است.

$$x = ۱$$

$$y = ۲$$

$$\underline{z = ۳}$$

طول گلی تخته هم ۶ در می‌آید.

مثال ۲: این مثال از یک کتاب ریاضی ایران قدیم گرفته شده است:

ملکه ای یک شب گردنبندی از مروارید به گردن بسته بود. ناگهان گردنبند پاره شد و یک سوم مرواریدها بر کف اتاق ریخت. یک چهارم مرواریدها هم روی تخت افتاد و بیست مروارید در رشته باقی ماند. در آغاز چند مروارید روی رشته وجود داشت؟

تعداد مرواریدهای روی رشته قبل از پاره شدن را با x نشان می دهیم. تعداد کل مرواریدها:

همه روی رشته $x =$ قبل از حادثه

یک سوم روی زمین، یک چهارم روی تخت، $20 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x =$ بعد از حادثه
۲۰ تا روی رشته

اما این دو عبارت مربوط به قبل و بعد از حادثه باید با هم برابر باشند، زیرا همه مرواریدها را در نظر گرفته ایم. تساوی زیر را می نویسیم:

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 20$$

با ضرب کردن دو طرف در ۱۲، کسرها را از بین می بریم:

$$12x = 12 \times \frac{1}{3}x + 12 \times \frac{1}{4}x + 12 \times 20$$

یعنی: $12x = 4x + 3x + 240 = 7x + 240$

از هر دو طرف معادله $7x$ را تفریق می کنیم:

$$5x = 240$$

یعنی: $x = 48$

گردنبند در آغاز ۴۸ مروارید داشته است. ب راحتی می توانید امتحان کنید که گردنبندی دارای ۴۸ مروارید با صورت مسئله جور در می آید.

روش تراختنبرگ از دیدگاه جبر

دستور ضرب اعداد در شش

از این روشهای تغییر شکل دادن معادله‌ها استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم که دستور ضرب اعداد در شش و سایر دستوره‌های این روش واقعاً جواب درست را می‌دهند. ضمناً با این کار معلوم می‌شود که جواب درست چگونه از این دستور به دست می‌آید و این موضوع جالبی است زیرا موجب می‌شود دید چیره‌تری نسبت به دستور مورد نظر پیدا کنیم.

دستور ضرب اعداد در شش می‌گوید «با نصف همسایه جمع می‌کنیم، اگر فرد باشد پنج تا هم اضافه می‌کنیم» یعنی اگر خود عدد فرد باشد، و اگر عدد فرد نباشد این پنج را اضافه نمی‌کنیم. با این کار حاصل ضرب اعداد در شش به دست می‌آید. برای رسیدن به این دستور، شش را به شکل خاصی می‌نویسیم:

$$6 = 5 + 1$$

$$6 = \frac{1}{4} \times 10 + 1$$

۶ را به صورت بالا می‌نویسیم. عددی را که باید در ۶ ضرب شود چطور می‌نویسیم؟ در صورت تمایل می‌توانیم این عدد را N بنامیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم (مثلاً ۴۵۲۸؛ اما نمی‌خواهیم اولین رقم را محدود کنیم که ۴ باشد، پس آن را a می‌نامیم، به همین ترتیب رقمهای دیگر را هم b ، c ، d می‌خوانیم):

$$N = a \ b \ c \ d$$

$$N = a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d$$

$$= 1000a + 100b + c + d$$

در اینجا N را به عنوان عددی چهار رقمی گرفته‌ایم، ولی این فقط به خاطر

مشخص بودن کار است. اگر عدد را پنج رقمی می گرفتیم، شروع آن ۱۰۰۰۰ ضرب در a تا آخر می شد.

می خواهیم این عدد N را در ۶ ضرب کنیم. برای جلوگیری از اشتباه، ضرب دو عدد را به صورت نقطه ای بین آن دو نشان می دهیم و مثلاً حاصل ضرب ۵ در ۷ را به صورت ۵.۷ نشان می دهیم. حالا N را در ۶ ضرب می کنیم:

$$\begin{aligned} 6 \cdot N &= \left(\frac{1}{4} \cdot 10 + 1 \right) \cdot N & \text{ زیرا ۶ برابر است با } \frac{1}{4} \cdot 10 + 1 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot N + N & \text{ پرانتزها را حذف می کنیم} \end{aligned}$$

به جای عدد چهار رقمی، صورت گسترده اش را می گذاریم:

$$\begin{aligned} 6 \cdot N &= \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot (a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d) \\ &+ 1 \cdot (a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d) \end{aligned}$$

حالا پرانتزهای معادله را در هر دو جا حذف می کنیم:

$$\begin{aligned} 6 \cdot N &= \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot a \cdot 1000 + \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot b \cdot 100 + \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot c \cdot 10 \\ &+ \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot d + a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d \end{aligned}$$

در اولین جمله پس از علامت تساوی می توانیم ۱۰ و ۱۰۰۰ رادر یکدیگر ضرب کنیم تا ۱۰۰۰۰ به دست آید، چنانکه

$$\frac{1}{4} \cdot 10 \cdot a \cdot 1000 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot a \cdot 10000 \quad \text{ بشود}$$

ضربهای مشابهی هم می توانیم در جمله های دیگر انجام دهیم. نتیجه به صورت صفحه بعد خواهد بود:

$$e.N = \frac{1}{4} \cdot a \cdot 10000 + \frac{1}{4} \cdot b \cdot 1000 + \frac{1}{4} \cdot c \cdot 100 + \frac{1}{4} \cdot d \cdot 10 + a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$$

اکنون به نقطه حساس ماجرا رسیده‌ایم. ترتیب قرار گرفتن جمله‌ها را عوض می‌کنیم. دو جمله‌ای که به صورت «چیزی ضرب در ۱۰۰۰» هستند کنار هم قرار می‌گیرند؛ آنها هم که چیزی ضرب در ۱۰۰ هستند کنار هم، تا آخر:

$$\begin{aligned} e.N &= \frac{1}{4} \cdot a \cdot 10000 \\ &+ \frac{1}{4} \cdot b \cdot 1000 + a \cdot 1000 \\ &+ \frac{1}{4} \cdot c \cdot 100 + b \cdot 100 \\ &+ \frac{1}{4} \cdot d \cdot 10 + c \cdot 10 \\ &+ d \end{aligned}$$

حالا می‌توانیم، همان‌طور که چند صفحه قبل دیدیم، پرانتزها را وارد کنیم. در دومین سطر بالا، دو جمله با یکدیگر جمع می‌شوند و هر جمله به صورت چیزی ضرب در هزار است. پس می‌توانیم از این ۱۰۰۰ «فاکتور» بگیریم و آنچه را که می‌ماند داخل پرانتز ببریم:

$$\frac{1}{4} \cdot b \cdot 1000 + a \cdot 1000 = \left(\frac{1}{4} \cdot b + a \right) \cdot 1000$$

همین کار در سطرهای دیگر هم انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} e.N &= \frac{1}{4} \cdot a \cdot 10000 \\ &+ \left(a + \frac{1}{4} \cdot b \right) \cdot 1000 + \end{aligned}$$

$$+ \left(b + \frac{1}{4} \cdot c \right) \cdot 100$$

$$+ \left(c + \frac{1}{4} \cdot d \right) \cdot 10$$

$$+ \left(d + \frac{1}{4} \cdot 0 \right) \cdot 1$$

زیرا هر چیزی ضرب در صفر، می شود صفر

الگوی عمل در اینجا روشن است. جمله $\frac{1}{4} \cdot 0$ را برای کامل شدن الگو اضافه کردیم؛ همیشه اگر بخواهیم حق داریم به هر چیزی صفر را بیفزاییم، زیرا اضافه کردن صفر، عدد را کم یا زیاد نمی کند.

این الگو هنوز کامل نیست. برای کامل کردن آن می توانیم یک جمله صفر هم در آغاز به سطر اول بیفزاییم. جمله $\frac{1}{4} \cdot a \cdot 10000$ را به صورت $\frac{1}{4} \cdot a \cdot 10000 + 0$ می نویسیم. در این صورت:

$$6.N = \left(0 + \frac{1}{4} \cdot a \right) \cdot 10000$$

$$+ \left(a + \frac{1}{4} \cdot b \right) \cdot 1000$$

$$+ \left(b + \frac{1}{4} \cdot c \right) \cdot 100$$

$$+ \left(c + \frac{1}{4} \cdot d \right) \cdot 10$$

$$+ \left(d + \frac{1}{4} \cdot 1 \right) \cdot 1$$

«دستور ضرب اعداد در شش» در بالا بخوبی دیده می شود. عدد اولیه N در نوشتن معمولی به صورت عدد چهار رقمی $abcd$ بود به طوری که a رقم مرتبه هزارگان بود تا آخر. به جای a در مرتبه هزارگان جواب، داریم $\left(a + \frac{1}{4} \cdot b \right) \cdot 1000$. یعنی رقم موجود در این مرتبه، بعلاوه نصف همسایه طرف راست آن که $\left(\frac{1}{4} \cdot b \right)$ است. به همین ترتیب در همه

مرتبه‌های دیگر نیز «عدد را با همسایه‌اش جمع می‌کنیم».

اگر عدد مفروض N فقط شامل رقمهای زوج، نظیر ۲ و ۶، باشد قضیه به همین جا ختم می‌شود. اما اگر یک ۳ یا ۷ داشته باشیم اوضاع از چه قرار خواهد بود؟ دستور در این باره می‌گوید «اگر عدد فرد باشد، آن را با همسایه جمع می‌کنیم و پنج تا هم می‌افزاییم». در این حالت یکی از عبارتهای $\frac{1}{2} \cdot a$ ، $\frac{1}{2} \cdot b$ و غیره کسری خواهد بود زیرا نصف ۷ یا چیزی از این قبیل است.

اکنون به طریقی چنین وضع ممکنى را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم یکی از رقمها، مثلاً b فرد است و به جای آن عبارت $2n+1$ می‌گذاریم. هر عدد صحیح فرد را می‌توانیم به این صورت بنویسیم. مثلاً ۷ برابر است با $2 \cdot 3 + 1$ ، و ۹ با $2 \cdot 4 + 1$ برابر است. در اینجا n همان چیزی است که آن را «نیمه کوچکتر» عدد فرد خوانده‌ایم. در معادلات بالا به جای b عبارت $2n+1$ را می‌گذاریم و معلوم می‌شود که استدلال بالا در اینجا هم به نتیجه می‌رسد. می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} 6 \cdot N &= \left(0 + \frac{1}{2} \cdot a\right) \cdot 10000 \\ &+ \left(a + n + \frac{1}{2}\right) \cdot 1000 \\ &+ \left(2n + 1 + \frac{1}{2} \cdot c\right) \cdot 100 \\ &+ \text{سایر جمله‌ها} \\ &= \left(0 + \frac{1}{2} a\right) \cdot 10000 + (a + n) \cdot 1000 + 500 \\ &+ \left(2n + 1 + \frac{1}{2} \cdot c\right) \cdot 100 \\ &+ \text{سایر جمله‌ها} \\ &= \left(0 + \frac{1}{2} a\right) \cdot 10000 + (a + n) \cdot 1000 + \end{aligned}$$

$$+ (b + \frac{1}{4} \cdot c + 5) \cdot 100 \text{ (به جای } 2n + 1 \text{ همان } b \text{ را می گذاریم)}$$

سایر جمله ها +

از اینجا معلوم می شود همان طور که در دستور هم داشتیم باید از «نیمه کوچکتر» استفاده کنیم و ۵ را بیفزاییم. پس درستی این دستور ثابت می شود.

اثبات «دستور ضرب اعداد در شش» برای توضیح هر چه بیشتر موضوع به طور مفصل بیان شد. این کار را دیگر تکرار نمی کنیم، زیرا با همین روش، می توانیم سایر دستورهای تراختنبرگ را هم به دست آوریم. با درک این دستور ضرب اعداد در شش، کافی است اثبات چند مورد دیگر از روش تراختنبرگ را به اختصار بیان کنیم.

ضرب بدون جدول در حالت کلی

سایر «دستورها» کلاً به روشی همانند آنچه در بخش گذشته دیدیم اثبات می شوند. البته دستورهای مربوط به ضرب اعداد در هشت و نه قدری تفاوت دارند. به طور خلاصه:

۱. «دستور ضرب اعداد در هفت» خیلی شبیه دستور ضرب در شش

است و فقط در این مورد باید عدد را دو برابر کنیم. در نتیجه، طرز یافتن دستور ضرب در هفت شبیه یافتن دستور ضرب در شش است که در بخش قبل بیان شد، فقط در اینجا به جای $6.N$ باید $7.N$ بگذاریم و ۷ را به صورت $10 + 2 \cdot \frac{1}{4}$ بنویسیم، همان طور که ۶ را به صورت $10 + 1 \cdot \frac{1}{4}$ می نوشتیم.

۲. «دستور ضرب اعداد در پنج» هم به همین شیوه اثبات می شود و فقط در یک چیز متفاوت است. به جای $6.N = (\frac{1}{4} \cdot 10 + 1) \cdot N$ این بار

صورت ساده تر $۱۰۰.N = \frac{1}{4} . ۵.N$ را داریم.

اثبات دو دستور مربوط به ضرب اعداد در هفت و در پنج همانند آنچه در بخش قبل دیدیم با انجام تغییرات لازم، صورت می گیرد و در صورت تمایل می توانید به قصد تمرین یا سرگرمی این کار را بکنید.

۳. دستورهای مربوط به ضرب در نه و در هشت به روش دیگری اثبات می شوند، یعنی در یکجا چنانکه خواهیم دید «شگرد» دیگری وارد کار می شود.

دستور ضرب اعداد در نه

لا بد به یاد دارید که برای ضرب کردن اعداد در نه، بدون استفاده از جدول ضرب، به صورت زیر عمل می کنیم:

(۱) رقم سمت راست را از ۱۰ کم می کنیم.

(۲) هر رقم دیگر را از ۹ تفریق می کنیم و سپس همسایه را به

حاصل می افزاییم.

(۳) وقتی به رقم آخر در انتهای سمت چپ جواب رسیدیم، رقم

سمت چپ عدد مفروض منهای ۱ را می گذاریم.

ضمن انجام این کارها ممکن است به طور عادی ده بر یکی داشته

باشیم (رقم بزرگتری به مرتبه بعد نقل نمی شود).

حالا ببینیم این دستور چگونه به دست می آید. رقم ۹ را می توانیم به

صورت ۱ - ۱۰ بنویسیم. این کار را می کنیم، زیرا از این راه به دستور

مورد نظر می رسیم. ضمناً به ازای هر عدد a ، مقدار $۹a$ یا ۹ ضرب در

a برابر است با $۱۰a - a$.

می توانیم عددی را که در ۹ ضرب می شود N بنامیم و آن را به

صورت گسترده ای که قبلاً داشته ایم، بنویسیم:

$$۹.N = ۹.(a. ۱۰۰۰ + b. ۱۰۰ + c. ۱۰ + d)$$

$$= ۹.a. ۱۰۰۰ + ۹.b. ۱۰۰ + ۹.c. ۱۰ + ۹.d$$

حالا با استفاده از اینکه ۹ برابر است با ۱۰ منهای ۱، $9a = 10a - a$ تا آخر، می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} 9 \cdot N &= 10 \cdot a \cdot 1000 - a \cdot 1000 + 10 \cdot b \cdot 100 - b \cdot 100 \\ &\quad + 10 \cdot c \cdot 10 - c \cdot 10 + 10 \cdot d \cdot 1 - d \cdot 1 \\ &= a \cdot 10000 - a \cdot 1000 + b \cdot 1000 - b \cdot 100 + c \cdot 100 \\ &\quad - c \cdot 10 + d \cdot 10 - d \end{aligned}$$

این شبیه کاری است که در بخش قبل دستور ضرب در شش کرده‌ایم. اکنون برای رسیدن به دستور ضرب در نه باید از نکته تازه‌ای استفاده کنیم. همیشه می‌توانیم یک عدد را جمع و همان عدد را تفریق کنیم، زیرا این کار مقدار را تغییر نمی‌دهد مثلاً اگر به عدد ۲۵ عدد ۲ را بیفزاییم و همین ۲ را هم کم کنیم، داریم $25 + 2 - 2$ که با همان ۲۵ برابر است. جمع و تفریق کردن یک عدد به منزله جمع کردن با صفر است که مقدار عدد را تغییر نمی‌دهد: ۲۵ بعلاوه صفر همان ۲۵ است. پس اگر بخواهیم، حق داریم مثلاً ۲۵ را به صورت $25 + 2 - 2$ یا به صورت $25 + 7 - 7$ یا هر چیزی از این قبیل بنویسیم.

این کار بیهوده به نظر می‌رسد؟ چنین برداشتی نادرست است. وقتی با مجموع چند جمله سرو کار داریم این صورت می‌تواند مفید واقع شود. در این گونه موارد می‌توانیم جمله تفریق شده، مثل ۲- را با یک گروه از جمله‌های دیگر دسته‌بندی کنیم و جمله افزوده شده، مثل ۲+ را با گروه دیگری از جمله‌ها. این نوع دسته‌بندی گاه، که بخت با ما یار باشد، منجر به ساده شدن هر دو گروه از جمله‌ها می‌شود.

در این مثال مربوط به دستور ضرب اعداد در نه، 9000 را جمع و تفریق می‌کنیم، همین‌طور 900 را، همچنین 90 را و 9 را، به صورت زیر:

$$\begin{aligned} 9 \cdot N &= a \cdot 10000 - 9000 + 9000 - a \cdot 1000 + b \cdot 1000 \\ &\quad - 900 + 900 - b \cdot 100 + c \cdot 100 - 90 + 90 \\ &\quad - c \cdot 10 + d \cdot 10 - 9 + 9 - d \end{aligned}$$

سپس به دسته بندی جمله های مرتبه «هزارگان» و جمله های مرتبه «صدگان» و غیره می پردازیم که نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} 9.N &= a \cdot (10000) + (9-a+b) \cdot 1000 + (9-b+c) \cdot 100 \\ &\quad + (9-c+d) \cdot 10 + (9-d) \cdot 1 \\ &\quad - (9000 + 900 + 90 + 9) \end{aligned}$$

مجموع عددهای داخل پرانتز در آخرین سطر ۹۹۹۹ است که آن را به صورت ۱ - ۱۰۰۰۰ می نویسیم. بنابراین:

$$\begin{aligned} 9.N &= a \cdot 10000 + (9-a+b) \cdot 1000 + (9-b+c) \cdot 100 \\ &\quad + (9-c+d) \cdot 10 + (9-d) \cdot 1 - 10000 + 1 \\ &= (a-1) \cdot 10000 + (9-a+b) \cdot 1000 \\ &\quad + (9-b+c) \cdot 100 + (9-c+d) \cdot 10 + (10-d) \cdot 1 \end{aligned}$$

این دقیقاً همان «دستور ضرب اعداد در نه» است که به جای کلمات با علامتها بیان شده است.

دستور ضرب اعداد در هشت

رقم ۸ را به صورت ۲ - ۱۰ می نویسیم، همان طور که ۹ را به صورت ۱ - ۱۰ نوشتیم. سپس همان شیوه بخش قبل را دنبال می کنیم، فقط آنجا که به جمع و تفریق کردن یک عدد می رسیم روال کار قدری فرق می کند. قبلاً اعداد ۹۰۰۰، ۹۰۰، ۹۰ و ۹ را جمع و تفریق می کردیم. اکنون برای دستور ضرب اعداد در هشت، دو برابر این عددها را جمع و تفریق می کنیم که عبارت اند از ۱۸۰۰، ۱۸۰، ۱۸ و ۱۸۰۰۰. نتیجه این می شود که باید حاصل تفریق از ۹ (یا در مرحله اول، حاصل تفریق از

(۱۰) را دو برابر کنیم، و رقم سمت چپ جواب ۲ تا کمتر از رقم سمت چپ عدد مفروض است، نه یکی. این هم دقیقاً همان دستور ضرب اعداد در هشت است.

مجذور کردن اعداد

در یکی از فصلهای گذشته روشهایی برای یافتن مجذور هر عدد، یعنی ضرب کردن هر عدد در خودش بیان کردیم. آنجا بحث را با دو نوع کاملاً خاص از اعداد شروع کردیم:

۱. عددهای دو رقمی که رقم دومشان ۵ است، مثل ۳۵. برای ضرب کردن ۳۵ در ۳۵، رقم ۳ را در رقم یکی بیشتر از آن، یعنی ۴ ضرب می کنیم، حاصل ۱۲ می شود. به دنبال این ۱۲، می نویسیم ۲۵ و جواب را که ۱۲۲۵ است خواهیم داشت.

به زبان علامتهای جبری، این گونه اعداد به صورت $a \cdot 10 + 5$ هستند. نتیجه مطلوب، یعنی مجذور عدد عبارت است از $(a \cdot 10 + 5)^2$ که برابر است با $(a \cdot 10 + 5)(a \cdot 10 + 5)$. پرانتزها را بسط می دهیم:

$$\begin{aligned} (a \cdot 10 + 5) \cdot (a \cdot 10 + 5) &= a \cdot 10 \cdot (a \cdot 10 + 5) \\ &\quad + 5 \cdot (a \cdot 10 + 5) \\ &= a \cdot a \cdot 100 + a \cdot 50 + a \cdot 50 + 25 \\ &= a \cdot a \cdot 100 + a \cdot 100 + 25 \end{aligned}$$

حالا دو جمله اول را دسته بندی می کنیم و چنانکه در فصل قبل دیدیم بین آنها از a فاکتور می گیریم و پرانتزهای لازم را می گذاریم. عبارت بالا به این صورت در می آید:

$$\begin{aligned}(a \cdot ۱۰ + ۵)^2 &= a \cdot (a \cdot ۱۰۰ + ۱۰۰) + ۲۵ \\ &= a \cdot (a + ۱) \cdot ۱۰۰ + ۲۵\end{aligned}$$

این همان دستور مورد نظر است که با علامتها بیان شده است. زیرا $a(a+1)$ همان رقم دهگان ضرب در رقم یکی بیشتر است و از ضرب ۱۰۰ معلوم می شود که حاصل این ضرب تداخلی با ۲۵ نمی کند (برای اینکه بر اثر ضرب کردن هر عدد در ۱۰۰، دو صفر به دنبال آن قرار می گیرد). ۲. اگر اولین رقم عدد دو رقمی ۵ باشد، مثل ۵۶، این ۵ را مجذور می کنیم می شود ۲۵ و سپس رقم یکان را (که در مورد ۵۶، رقم ۶ است) به آن می افزاییم. نتیجه، دو رقم اول جواب است: در مورد ۵۶، بخشی از جواب به این طریق به دست می آید $۵۶^2 = ۳۱??$. برای تعیین دو رقم آخر جواب، کافی است رقم یکان عدد مفروض را مجذور کنیم؛ در مورد ۵۶، رقم ۶ را مجذور می کنیم که می شود ۳۶. این ۳۶ بقیه جواب است و عدد کامل ۳۱۳۶ است.

چنین عددی به صورت $(۵ \cdot ۱۰ + a)^2$ است که برابر می شود با $(۵ \cdot ۱۰ + a) \cdot (۵ \cdot ۱۰ + a)$. مثل حالت قبل، پرانترها را بسط می دهیم:

$$\begin{aligned}(۵ \cdot ۱۰ + a)^2 &= ۵ \cdot ۱۰ \cdot ۵ \cdot ۱۰ + ۵ \cdot ۱۰ \cdot a + ۵ \cdot ۱۰ \cdot a + a \cdot a \\ &= ۲۵ \cdot ۱۰۰ + ۱۰۰ \cdot a + a^2 \\ &= (۲۵ + a) \cdot ۱۰۰ + a^2\end{aligned}$$

این عبارت به زبان علامتها همان چیزی را می گوید که در دستورالعمل بند اول این بخش برای مجذور کردن ۵۶ بیان شد.

۳. برای مجذور کردن هر عدد دو رقمی در حالت کلی، مثلاً در مورد ۷۳، به طریق زیر عمل می کنیم:

(۱) رقم یکان جواب را از مجذور کردن رقم یکان عدد مفروض به دست می آوریم:

(۲) رقم دهگان جواب را با دو برابر کردن حاصل ضرب متوالی عدد مفروض پیدا می کنیم (برای ۷۳، دو برابر ۷ ضرب در ۳، می شود ۴۲)؛ و سرانجام

(۳) رقم صدگان و هزارگان جواب از مجذور کردن رقم دهگان عدد مفروض پیدا می شود.
پس در مورد ۷۳ می توانیم بنویسیم:

$$\begin{array}{r} 732 \\ \hline 53429 \end{array}$$

چنین عددی در حالت کلی به صورت $a \cdot 10 + b$ است. آن را مجذور می کنیم:

$$\begin{aligned} (a \cdot 10 + b)^2 &= (a \cdot 10 + b) \cdot (a \cdot 10 + b) \\ &= a \cdot 10 \cdot (a \cdot 10 + b) + b \cdot (a \cdot 10 + b) \\ &= a \cdot 10 \cdot a \cdot 10 + a \cdot 10 \cdot b + b \cdot a \cdot 10 + b^2 \\ &= a^2 \cdot 100 + 2a \cdot b \cdot 10 + b^2 \end{aligned}$$

این عبارت نهایی هم ارز است با همان دستور کاری که در بالا گفته شد. حاصل ضرب $a \cdot b$ همان حاصل ضرب متوالی یعنی حاصل ضرب رقم یکان در رقم دهگان است. و در معادله دیده می شود که باید آن را دو برابر کرد.

عمل ضرب به روش یکان و دهگان

نخست ضرب عددی سه رقمی در عددی یک رقمی را بررسی می کنیم، مثلاً ۶۱۷ ضرب در ۳:

$$\begin{array}{r} 0617 \times 3 \\ \hline 1851 \end{array}$$

این کار چنانکه لابد به یاد می آورید با حرکت دادن یک الگوی D در طول عدد ۶۱۷، از راست به چپ انجام می شود:

$$\begin{array}{r} D \\ 0617 \times 3 \\ \hline 1 \end{array}$$

این رقم «یکان» ۳ ضرب در ۷، یعنی ۲۱ است

و سپس

$$\begin{array}{r} D \\ 0617 \times 3 \\ \hline 5 \end{array}$$

این ۵ برابر است با رقم یکان ۱ ضرب در ۳ بعلاوه رقم دهگان ۷ ضرب در ۳

و همین کار تا آخر دنبال می شود.

اکنون یک عدد سه رقمی را در حالت کلی به صورت جمله های جبری در نظر می گیریم. این عدد به صورت $a b c$ نوشته می شود و صورت گسترده آن چنین است:

$$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c \cdot 1$$

فرض می کنیم این عدد در n ضرب می شود که عددی یک رقمی است. بنابراین، صورت جبری حاصل ضرب مورد نظر چنین است:

$$(a \cdot 100 + b \cdot 10 + c \cdot 1) \cdot n$$

پرانتر را بسط می دهیم:

$$\begin{aligned} & (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c \cdot 1) \cdot n \\ &= n \cdot a \cdot 100 + n \cdot b \cdot 10 + n \cdot c \cdot 1 \end{aligned}$$

هر یک از جمله های دوتایی $n \cdot a$ ، $n \cdot b$ و $n \cdot c$ حاصل ضرب دو عدد یک

رقمی است. حاصل آنها در حالت کلی عددی دو رقمی است، مثلاً ۷ ضرب در ۳ می شود ۲۱ که عددی دو رقمی است. برای آنکه رشته موضوع گم نشود آنها را به صورت عددهای دو رقمی می نویسیم. برای این کار، علامتهای جدیدی با زیرنویس به کار می بریم. یکی از اینها U_a است که به معنی رقم یکان حاصل ضرب a در مضروب فیه n است. عدد n هم مضروب فیه مسئله است و برای نمایش آن به علامت دیگری نیاز نداریم. زیر نویس a در U_a می گوید که باید n را در a ضرب کنیم و حرف U در a به معنای آن است که باید رقم یکان نتیجه را بگیریم. رقم دهگان حاصل ضرب با علامت T_a نشان داده می شود و مشابه این علامتها برای b و c هم در نظر گرفته می شود:

$$n \cdot a = T_a \cdot 10 + U_a \quad \text{یکان و دهگان حاصل ضرب}$$

$$n \cdot b = T_b \cdot 10 + U_b$$

$$n \cdot c = T_c \cdot 10 + U_c$$

پس حاصل ضرب مطلوب به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} & (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c \cdot 1) \times n \\ &= (T_a \cdot 10 + U_a) \cdot 100 + (T_b \cdot 10 + U_b) \cdot 10 + \\ & \quad (T_c \cdot 10 + U_c) \cdot 1 \end{aligned}$$

پرانترها را بسط می دهیم:

$$\begin{aligned} & (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c \cdot 1) \times n \\ &= T_a \cdot 1000 + U_a \cdot 100 + T_b \cdot 100 + U_b \cdot 10 + T_c \cdot 10 + U_c \\ &= T_a \cdot 1000 + (U_a + T_b) \cdot 100 + (U_b + T_c) \cdot 10 + U_c \end{aligned}$$

با یادآوری اینکه:

الف) حروف T و U رقمهای یکان و دهگان حاصل ضرب هر رقم در n هستند؛ و
 ب) زیرنویس نشان می‌دهد که n در کدام رقم از عدد مفروض ضرب می‌شود،

معلوم می‌شود که معادلهٔ اخیر بیانگر عمل ضرب به روش یکان و دهگان است (حروف U و T به منزله حروف y و d هستند که قبلاً برای بیان این روش به کار رفته‌اند). به عنوان مثال، جملهٔ $10(U_b + T_c)$ را در نظر می‌گیریم:

رقم یکان حاصل ضرب b در عدد n $U_b = n$

رقم دهگان حاصل ضرب c در عدد n $T_c = n$

سپس این عمل را برای ضربی که به صورت معمولی نوشته شده انجام می‌دهیم:

$$\begin{array}{r} a \quad b \quad c \quad \times \quad n \\ \hline \end{array}$$

علامتهای U_b و T_c را روی حرفهای مربوط به آنها قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{r} U_b \quad T_c \\ a \quad b \quad c \quad \times \quad n \\ \hline \end{array}$$

با گذاشتن این علامتها در جای درست‌شان، دیگر نیازی به زیرنویسها هم

نخواهد بود:

$$\begin{array}{r} U \quad T \\ a \quad b \quad c \quad \times \quad n \\ \hline * \end{array}$$

با این کار رقمی از جواب که در محل ستاره قرار می‌گیرد به دست می‌آید

بقیه رقمهای جواب هم دقیقاً به همین ترتیب از سایر جمله‌های معادله به دست می‌آیند.

عمل ضرب در عددهای طولانیتر

فرض کنید می‌خواهیم ۶۱۷ را در ۲۳ ضرب کنیم. از الگوی د ی برای یافتن هر رقم از جواب استفاده می‌کنیم. هر رقم از جواب با جمع کردن دو عدد حاصل از الگوی د ی به صورت زیر پدیدار می‌شود:

$$\begin{array}{r} \text{د ی} \quad \text{د ی} \\ 00617 \times 23 \\ \hline \end{array}$$

$$18 + 53 = 8 \text{ می‌دهد } 3 \text{ با } 61$$

$$02 + 12 = 3 \text{ می‌دهد } 2 \text{ با } 17$$

$$8 + 3 = 1 \text{ داریم}$$

صورت کامل حل این مثال چنین است:

$$\begin{array}{r} 00617 \times 23 \\ \hline 140191 \end{array}$$

فرض کنید عدد سه رقمی دلخواهی، مثلاً abc ، را می‌خواهیم در عددی دو رقمی دلخواهی، مثلاً mn ضرب کنیم. صورت گسترده این ضرب چنین است:

$$(a \cdot 100 + b \cdot 10 + c \cdot 1) \times (m \cdot 10 + n)$$

پرانته‌ها را بسط می‌دهیم؛ جواب مطلوب به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & a \cdot 100 \cdot m \cdot 10 + a \cdot 100 \cdot n + b \cdot 10 \cdot m \cdot 10 + b \cdot 10 \cdot n \\ & + c \cdot m \cdot 10 + c \cdot n \end{aligned}$$

$$= a \cdot m \cdot 1000 + a \cdot n \cdot 100 + b \cdot m \cdot 100 + b \cdot n \cdot 10 \\ + c \cdot m \cdot 10 + c \cdot n \cdot 1$$

در نخستین جمله $a.m$ داریم که حاصل ضرب دو رقم در یکدیگر است. این حاصل ضرب در حالت کلی عددی دو رقمی است. باید همه این اعداد دو رقمی مربوط به $a.m$ ، $a.n$ ، $b.m$ تا آخر را به صورت عددهای دو رقمی بنویسیم. این کار را کمی پیشتر هنگام ضرب کردن در عددی یک رقمی انجام دادیم. این کار را با استفاده از علامتهای T_a و U_a و غیره انجام شد.

ولی حالا به زیرنویس دیگری نیاز داریم زیرا عدد مفروض را در عددی که بیش از یک رقم دارد ضرب می کنیم. در نصف دفعات رقم m و در نصف دیگر رقم n در جمله ها ظاهر می شود. در مثال بالا که عددی را در ۲۳ ضرب می کردیم، در نصف دفعات با جفتی کار می کردیم که شامل ۲ بود و در نصف دفعات دیگر با جفتی شامل رقم ۳ از عدد ۲۳. برای آنکه به یاد داشته باشیم که در هر لحظه با کدام یکی کار می کنیم باید زیرنویس دیگری را هم وارد کنیم و برای این منظور علامتی به صورت U_{am} داریم. البته این تنها یک رقم است هر چند که در نوشتنش سه حرف به کار رفته است؛ این دو پانویس را تنها برای راحتی به کار می بریم تا یادمان باشد کدام عددها را داریم در یکدیگر ضرب می کنیم.

عبارتهای دو رقمی مورد نیاز ما به قرار زیرند:

$$a \cdot m = T_{am} \cdot 10 + U_{am}$$

$$a \cdot n = T_{an} \cdot 10 + U_{an}$$

$$b \cdot m = T_{bm} \cdot 10 + U_{bm}$$

$$b \cdot n = T_{bn} \cdot 10 + U_{bn}$$

$$c \cdot m = T_{cm} \cdot 10 + U_{cm}$$

$$c \cdot n = T_{cn} \cdot 10 + U_{cn}$$

پس جواب مطلوب عمل ضرب مذکور به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} & (T_{am} \cdot 10 + U_{am}) \cdot 1000 + (T_{an} \cdot 10 + U_{an}) \cdot 100 \\ & + (T_{bm} \cdot 10 + U_{bm}) \cdot 100 + (T_{bn} \cdot 10 + U_{bn}) \cdot 10 \\ & + (T_{cm} \cdot 10 + U_{cm}) \cdot 10 + (T_{cn} \cdot 10 + U_{cn}) \end{aligned}$$

حالا پرانتزها را بسط می دهیم و با تغییر دادن ترتیب جمله ها به نتیجه نهایی زیر می رسم:

$$\begin{aligned} \text{جواب} = & T_{am} \cdot 10000 + (T_{an} + U_{am} + T_{bm}) \cdot 1000 \\ & + (U_{an} + T_{bn} + U_{bm} + T_{cm}) \cdot 100 \\ & + (U_{bn} + T_{cn} + U_{cm}) \cdot 10 + U_{cn} \end{aligned}$$

این همان بیان جبری روشی جمع کردن نتایج دو جفت دی (UT) در هر مرحله از ضرب است. اگر تعداد رقمهای دو عددی که در یکدیگر ضرب می شوند بیش از اینها باشد باز هم همین شیوه اثبات را می توانیم به کار بندیم.

نمایش اعداد به طول دلخواه

در چند بخش اخیر، با صورت کلی اعداد سرو کار داشتیم مثل عدد $a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$. این عدد به طور عادی به صورت $abcd$ نوشته می شود و بیانگر هر عدد چهار رقمی دلخواه است.

این صورت را می توانیم کلی تر کنیم به طوری که منحصر به عددهای چهار رقمی نباشد. می توانیم عبارتی بنویسیم که نشان دهنده هر عددی با هر تعداد رقم باشد. برای این کار باید با دو مطلب آشنا باشیم:

۱. توانهای هر عددی را با نوشتن عدد کوچکی در گوشه بالای سمت راست آن نشان می دهیم. قبلاً مجذور ۷ را به صورت $۷^۲$ نوشته ایم که در آن ۲ نشانه آن است که دو عدد ۷ در یکدیگر ضرب می شوند، $۷^۲ = ۷ \times ۷ = ۴۹$. به همین طریق، $۷^۳$ یعنی حاصل ضرب سه ۷ در یکدیگر، $۷^۳ = ۷ \times ۷ \times ۷ = ۳۴۳$. این اصل برای هر توانی چون $۷^۴$ ، $۷^{۲۳}$ و غیره صادق است.

وقتی این کار را در مورد عدد ۱۰ انجام دهیم متوجه می شویم که «نما»ی عدد که قدری بالاتر نوشته می شود، نشان می دهد که چند صفر به دنبال ۱ قرار گرفته اند. مثلاً $۱۰^۲ = ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰$ که حاصل توان، دو صفر دارد. همچنین $۱۰^۴$ برابر است با حاصل ضرب چهار ۱۰ در یکدیگر $۱۰^۴ = ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰۰۰$ که چهار صفر دارد.

۲. علامتی را به کار می بریم به صورت Σ که به معنای «تشکیل حاصل جمع» است. این علامت یکی از حروف الفبای یونانی است که «سیگما» نام دارد و معادل "s" انگلیسی است. مثالی از کاربرد آن چنین است:

$$\sum_{n=1}^3 2^n = 2^1 + 2^2 + 2^3$$

حالا با ترکیب این دو نکته می توانیم کلی ترین صورت اعداد را بنویسیم. ابتدا باز هم همان عدد چهار رقمی $a.۱۰۰۰ + b.۱۰۰ + c.۱۰ + d$ را در نظر می گیریم. با استفاده از علامت توان، این عبارت را به صورت

$$a \cdot ۱۰^۳ + b \cdot ۱۰^۲ + c \cdot ۱۰ + d$$

می نویسیم (در آخرین جمله، d در ۱ ضرب می شود که صفری دنبالش نیست). توانهای ۱۰ برای استفاده از علامت Σ صورت مناسبی دارند زیرا همه آنها را می توانیم یکجا با علامت ۱۰^n نشان دهیم. در عدد چهار رقمی، نمای n بترتیب مقادیر ۳، ۲، ۱ و صفر را اختیار می کند. ضمناً به

جای a, b, c و d باید حروف جدیدی به صورت زیر بگذاریم:

$$a = a_3 \quad b = a_2 \quad c = a_1 \quad d = a_0$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d = \sum_{n=0}^{n=3} a_n \cdot 10^n$$

اکنون می‌توانیم به سراغ کلی‌ترین صورت عدد برویم، یعنی عددی k رقمی که در آن k می‌تواند هر مقدار دلخواهی باشد. برای این کار کلی‌ترین صورت عدد که آن را N می‌نامیم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$N = \sum_{n=0}^{n=k} a_n \cdot 10^n$$

با استفاده از این علامت و با دنبال کردن همان شیوه استدلالی که در بخشهای قبلی به کار رفت، می‌توانیم دستورهای ضرب را برای اعدادی با هر طول دلخواه به دست آوریم.

دستورالعملهای دیگر روش تراختنبرگ، افزون بر آنچه در بالا آورده شد، نیز با روشهای کلاً از همین نوع به دست می‌آید.

فصل هشتم

پسگفتار

ضمن مطالعه فصلهای قبل با روش تراختنبرگ برای اعمال اصلی ریاضی آشنا شدید که در واقع روش تازه‌ای برای انجام بنیادیترین عملهای حساب است. اگر همت کافی به خرج داده باشید، اکنون باید دست کم برداشتی از چگونگی کار در این روش نوظهور ریاضی داشته باشید. مسلماً گهگاه ضمن مطالعه، احساس دشواری کرده‌اید و این امری کاملاً طبیعی است. روش تراختنبرگ با آنچه قبلاً بدان خو کرده‌اید تفاوت دارد، و کنار گذاشتن عاداتهای جا افتاده و شیوه‌های قدیمی کار چندان آسانی نیست. اما با قدری شکیبایی می‌توانید بر این مشکل چیره شوید و بهره‌ای که از این راه حاصل می‌شود تلاشهای به کار رفته را چندین برابر جبران می‌کند.

ارزش این روش جدید را بیش از همه کسانی در خواهند یافت که در کلاسهای ابتدایی حساب درس می‌دهند. چنانکه در فصل اول دیدیم، از این پس مجبور نیستیم شوق طبیعی ذهنهای جوان را با مطالب یکنواخت، طولانی و تکراری پژمرده کنیم. روش قدیمی آنها را وادار می‌دارد که وقت خیلی زیادی را برای به خاطر سپردن جدول ضرب صرف کنند. این کار یعنی حفظ کردن ترکیبهای پرشماری از اعداد که

هر یک بتنهایی بی معناست و نتیجه طبیعی چنین وضعی ایجاد احساس دلزدگی است. به این ترتیب کل موضوع برای شخص ناخوشایند جلوه می کند. اما با بهره گیری از روش نوظهور، می توانیم طراوت موضوع را باقی نگاه داریم تا شاگردان جوان به انگیزه ذوق طبیعی خود پیشرفت کنند.

البته در این کتاب مطالب در چارچوب مناسب برای بزرگسالان بیان شده است؛ هنگام عرضه این مطالب به کودکان این چارچوب باید قدری تغییر کند و روی برخی نکات تاکید بیشتری بشود. چگونگی این تغییرات به نوبه خود موضوع جالبی است که در اینجا مجال پرداختن به جزئیات آن را نداریم.

مهمترین نکته ای که باید بدان توجه کنیم این است که تمامی این مطالب به شاگردان تدریس شده است. از اواخر دهه ۱۹۴۰ به این طرف، پی در پی گروههایی از شاگردان وارد مؤسسه تراختنبرگ شده و آموزش دیده اند. در واقع، کار حتی زودتر از این، یعنی وقتی که پروفیسور تراختنبرگ خودش به طور خصوصی به چند کودک تعلیم می داد آغاز شد. پس از آن، مؤسسه خود را ایجاد کرد و آموزش در قالب کلاسها و با همکاری مربیانی که دستیار او بودند ادامه یافت. به این ترتیب فوت و فنهای شیوه تدریس تکامل یافت و در خلال یک دوران چند ساله به بهترین وجه پرورده شد.

با وجود این نتایج به دست آمده از همان ابتدا دلگرم کننده بود. شاگردان همواره شیفته تواناییهایی نویافته خود می شدند و شوقی که در آنان پدید می آمد موجب پیشرفتهای بعدی می شد. به جای آنکه از یکنواختی مطالب روگردان شوند، گوناگونی موضوعها آنها را جلب می کرد. رفته رفته علائق آنان بر اثر موفقتهایی که کسب می کردند زنده می شد. قبلاً هم ضمن خواندن کتاب توجه کرده اید که از همان آغاز فصل اول چقدر تازگی وجود دارد که می تواند برای شاگردان جذابیت داشته باشد. در هر مرحله نکته تازه ای مطرح می شود و در عین حال

معمولاً همانندیهایی با مطالب قبلی وجود دارد به طوری که پیوستگی مطلوبی در موضوعها برقرار است. پی بردن به رمز پیشرفت چشمگیر آن کودکان، دشوار نیست.

آنان در درسهای دیگرشان هم جلو افتادند. احساس علاقه یا بی علافگی روی طیف گسترده‌ای از فعالیتها اثر می‌گذارد. کسانی که در یک رشته از درس تنبل هستند بزودی از همه درسها بدشان خواهد آمد و «مکتب‌گریز» خواهند شد. وجود این احساس در انسان امری طبیعی است. به همین ترتیب، کسانی که خوب پیش می‌روند، کسانی که هر روز موفقیت تازه‌ای کسب می‌کنند و چیز تازه‌ای یاد می‌گیرند، با روحیه‌ای شاداب به سراغ درسهای دیگر می‌روند. این اشخاص در برخورد با هر درسی اعتماد به نفس دارند و عموماً در این اندیشه‌اند که از هر درسی چه بهره‌ای می‌توانند بگیرند. شیوه درست شروع هم همین است و اگر عامل قوی دیگری آنان را از درس دیگر بیزار نکند، حتماً موفق خواهند شد.

ما دوست داریم که چنین پدیده‌هایی در همه مدارس کشورمان دیده شود. البته واقعیت امر این است که به دلایل گوناگون تغییرات در سطح وسیع همیشه به کندی صورت می‌گیرد. به طور معقول نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که هیچ تغییر مهمی در نظام آموزشی کشور ظرف مدتی کمتر از چند دهه صورت بگیرد. اما اگر این کار، ولو بتدریج، صورت بگیرد، چقدر عالی می‌شود! کودکان از رنج این کار گل رها می‌شوند و درسی که بیشترشان آن را سخت‌ترین درس می‌دانند آسانتر می‌شود. تازه برای بسیاری از آنان، جاذبه‌های نهفته اندک‌اندک نمایان می‌شود.

با این اقدام، تعداد هر چه بیشتری از آنان رفته‌رفته به سوی علوم پایه، که ریاضیات بنیادیترین آنهاست، گرایش می‌یابند و می‌توانیم امیدوار باشیم که سرانجام، این وضع به تأمین ضروری‌ترین نیاز کشور که وجود مهندسان و کارشناسان علوم پایه است، کمک کند.

برای ما بزرگترها دیر است که بخواهیم از مزایای چنین تغییری در

نظام آموزشی به طور مستقیم برخوردار شویم و نمی توانیم همپای کودکان از آن بهره بگیریم. اما همین حل مسائل کودکان و مدارس، به طور غیر مستقیم به نفع ما نیز خواهد بود. هر فرد متمدن، عضوی از یک جامعه است. آنچه جامعه را می آزارد، دانسته یا ندانسته فرد را نیز آزار می دهد و آنچه به نفع جامعه باشد در درازمدت منافع مستقیمی حتی برای افرادی که مستقیماً درگیر قضیه نیستند به بار خواهد آورد.

مهمتر از این منافع غیر مستقیم، این است که ما بزرگسالان می توانیم خودمان هم از روش تراختنبرگ مستقیماً بهره مند شویم. شاگردان مؤسسه تراختنبرگ چه کسانی هستند؟ آیا همه شان کودکند؟ نه، به هیچ وجه. کلاسهای برای کودکان و کلاسهای نیز ویژه بزرگسالان وجود دارد. کسانی که در کلاسهای بزرگسالان شرکت می کنند شور و شوق بیشتری دارند و بیشتر از کودکان ابراز رضایت می کنند. شور و شوق آنان بیشتر است زیرا قدر آنچه را که یاد می گیرند بهتر می دانند.

نخستین و مهمترین فایده، جنبه کاملاً کاربردی دارد: افزایش مهارت در انجام محاسبات. امروزه اوضاع در جهتی پیش می رود که مهارت و دقت در محاسبه برای همه کس به صورت امری ضروری در می آید. اغلب ما با مشغله هایی سرو کار داریم که مستقیماً ریاضی نیستند ولی ریاضیات کم کم در آنها رسوخ می کند. حتی نقاش چهره پرداز هم باید مثل همه ما، سیاهه پرداخت مالیات را تنظیم کند، بنابراین باید حساب و کتاب در آمد نامنظم خود را داشته باشد. کسی که صاحب و مدیر یک تعمیرگاه است، لابد به اقتضای تجربه و تمایل خود تعمیرات مکانیکی را بلد است ولی ضمناً باید گهگاه هم کار حسابداری بکند. باید حساب نسبتاً پیچیده لوازم خریداری شده و کارهای انجام گرفته، مالیاتها و حق بیمه کارگران و خیلی چیزهای دیگر را داشته باشد. همه ما کم و بیش چنین وضعی داریم.

در انجام این گونه امور ضروری، سرعت و سهولت روش تراختنبرگ

کمک زیادی می‌تواند بکند. در وهله نخست استفاده از این روشهای پیشرفته نویافته سبب کاهش وقت لازم برای این گونه کارها می‌شود. این به نوبه خود مزیت چشمگیری است.

در وهله دوم، نکته‌ای که اهمیتش از آنچه گفته شد کمتر نیست، این است که در روش نو، روی دقت محاسبه خیلی تأکید می‌شود. چنانکه قبلاً هم گفته‌ایم، کار محاسبه تنها با یافتن جواب درست به پایان می‌رسد و در واقع با اثبات کردن اینکه جواب یافته شده درست است. این اصل در زندگی روزمره کمتر رعایت می‌شود. معمولاً نتیجه‌ها را هیچ امتحان نمی‌کنند؛ یا نهایتاً همان کار را تکرار می‌کنند که امتحان ضعیف و غیر قابل اعتمادی است. روشهای بهتری برای این منظور وجود دارد. در لابه لای فصلهای قبلی بارها طرز امتحان کردن را بیان کرده‌ایم که اغلب بر اساس «مجموع ارقام» و بر اساس «باقیمانده تقسیم بر یازده» انجام می‌شود. هر دوی اینها کارآمدند. اگر آنها را همراه با یکدیگر به عنوان امتحان مضاعف به کار ببریم، نتیجه کار عالی است. در فصل چهارم (عمل جمع و یافتن جواب درست) نوع خاصی از امتحان را دیدیم که برای عمل خاصی ابداع شده است. در فصل پنجم (عمل تقسیم با سرعت و دقت بیشتر) به نوع دیگری بر یافتن جواب درست تأکید می‌شد. در این فصل، روش کاملی تحت عنوان روش «ساده» تقسیم برای کسانی که آن را سودمند می‌یابند بیان شد و علت آوردنش در این کتاب سهولت یادگیری آن است و اینکه طوری ابداع شده که احتمال اشتباه را به حداقل می‌رساند. همه این تأکیدها بر کسب اطمینان از اینکه اشتباهی در کار نیست، جزئی از روش تراختنبرگ است. هر شهروند عادی در امور روزمره خیلی وقتها دچار اشتباه می‌شود. چیزی لازم است که جلوی این لغزش را بگیرد. ما به خاطر اهمیتی که برای این موضوع قایلیم عمداً روی آن تأکید کرده‌ایم.

در کنار این روش امتحان که غلطها را با آن پیدا و تصحیح می‌کنیم، به لحاظ دیگری نیز دقت کار افزایش می‌یابد. در تمامی این

روش به تقویت تدریجی قدرت تمرکز توجه داشته‌ایم. این کار در دو فصل اول به نحو مفصلتری انجام شد. در فصلهای بعد نیز عمدتاً به صورت تنظیم مرحله به مرحله مباحث، دنبال شد. عادت به تمرکز مطلوب که از این طریق حاصل می‌شود کلاً از اشتباه کردن جلوگیری می‌کند و به این ترتیب اشتباههای کمتری، وجود خواهد داشت، که بخواهد از طریق امتحان آشکار شود.

سرانجام، موفقیت در فراگیری این شیوه‌های نوظهور به فراگیرندگان اعتماد به نفس می‌دهد. برای بسیاری از آنان حس اعتماد به نفس، چیز تازه‌ای است. اشخاص بسیاری از فکر هر گونه محاسبه، نوعی واهمه دارند؛ محاسبه را از راههای دشوار انجام می‌دهند و تقریباً در نیمی از موارد به جواب غلط می‌رسند با این طرز برخورد، حل کردن مسئله نوعی «پیروزی» به حساب می‌آید. وقتی برخورد عوض شود و این اشخاص اعتماد به نفس واقعی و بجا پیدا کنند اوضاع رو به بهبود می‌رود. عمل را به شیوه درست انجام می‌دهند، بر همه چیز تسلط می‌یابند و همین احتمال وقوع هر گونه اشتباهی را کاهش می‌دهد.

تأثیر کلی همه این عوامل اغلب به صورت بیدار شدن علاقه اشخاص به ریاضیات و کلاً نسبت به موضوعهای مربوط به ریاضیات، نمایان می‌شود. این تجدید حیات به سهم خود حتی مهمتر از همه نتایج عملی دیگری است که از روش تراختنبرگ حاصل می‌شود. آرزو داریم که مردم کشورمان از این مزایای عملی و کلی بهره کامل ببرند. ما بر این عقیده‌ایم که با گذشت زمان روش تراختنبرگ شهرت و اهمیت هر چه بیشتری خواهد یافت.